LES GUIDES MANGAS

ANALYSE

Auteur	HIROYUKI KOJIMA	enseignant-chercheur
Dessins	SHIN TOGAMI	dessinateur
Scénario	SHINJIRO NISHIDA	scénariste
	EIJI SHIMADA	scénariste
Studio	BECOM	
Traduction	VINCENT BECK	enseignant-chercheur
	CÉLINE CHEVALIER	enseignant-chercheur
	SÉBASTIEN DESREUX	docteur en algorithmique
	KEVIN DESTAGNOL	docteur en mathématiques
	TRISTAN POULLAOUEC	enseignant en classe prépa
Harmonisation	VINCENT BECK	enseignant-chercheur
Révision de la traduction	JEAN-YVES FÉVRIER	agrégé d'économie

Ohmsha

no starch press

H&K

Préface

— Certaines aventures ne peuvent réussir que grâce au manga —

Puisque vous feuilletez ce livre, vous aimez les mangas ou vous espérez faire des progrès en analyse (ou les deux !).

Si vous aimez les mangas, si vous vous dites « L'analyse sous forme de manga ? Génial ! », vous pouvez aller directement à la caisse, vous ne serez pas déçu. Ce manga est vraiment réussi, et ce n'est pas un hasard : les dessins sont de Shin Togami, un auteur de mangas reconnu, et le scénario a été écrit par Becom, un vrai studio de mangas.

Mais vous vous dites peut-être que « Les mangas sur les mathématiques sont toujours loupés… » C'est vrai. D'ailleurs, quand un éditeur chez Ohmsha m'a proposé d'écrire ce livre, j'ai bien failli refuser – et laisser passer une belle occasion. Les soi-disant « mangas éducatifs » sont vraiment décevants. Ils ont certes des illustrations, de grandes images, mais ils n'ont ni une vraie histoire, ni des personnages attachants. Ce n'est qu'après avoir lu un extrait d'un autre titre (le *Guide manga des statistiques*) que j'ai changé d'avis. Contrairement aux autres mangas éducatifs, celui-ci était très bien conçu, très bien réalisé ; il donnait vraiment envie de le lire. L'éditeur m'a promis que le mien serait aussi bon, alors j'ai accepté. Je m'étais souvent dit que les mangas pourraient me permettre de mieux enseigner les mathématiques, et c'était l'occasion de mettre l'idée en pratique. Je vous garantis que plus vous aimez les mangas, plus vous aimerez ce livre.

Vous pouvez aussi avoir ouvert ce livre en vous disant « Je n'aime pas beaucoup l'analyse, ça passera peut-être mieux avec du manga. » Dans ce cas, c'est vraiment le livre qu'il vous faut. Il aidera ceux qui se sont blessés avec l'analyse à faire leur rééducation. Car il ne se contente pas d'expliquer l'analyse via le manga, il la présente aussi d'une manière qui est fondamentalement différente de celle que l'on trouve dans les manuels traditionnels. D'abord, il montre par des exemples issus de la physique, des statistiques et de l'économie, à quoi l'analyse sert en pratique, ce que l'on ne peut pas comprendre avec des méthodes d'enseignement qui se cantonnent aux limites ou aux ε–δ. Sans une idée claire de ce qu'est l'analyse et de la manière dont elle est mise en œuvre dans le monde réel, on ne peut pas vraiment comprendre le sujet ni l'utiliser avec confiance ; l'analyse se réduit alors à la mémorisation de formules et de règles. Grâce à cette approche, vous ne verrez plus l'analyse comme une épreuve mais comme un outil.

Ensuite, ce livre explique toutes les formules au moyen d'*approximations au premier ordre*, ce qui aide à se représenter ce qu'elles veulent dire et à les comprendre facilement. Grâce à cette méthode d'enseignement géniale, on passe rapidement et aisément de la dérivation à l'intégration par exemple.

Ce livre va aussi plus loin que les autres mangas consacrés à l'analyse. Il ne recule ni devant les développements de Taylor, ni devant les dérivées partielles.

Tout ceci n'a été rendu possible que par le manga. Pourquoi apprend-on mieux avec un manga qu'avec un livre de cours ? Parce que le manga est une information visuelle, enrobée dans une histoire. Il parle aux sens et au cœur. En plus, l'analyse est particulièrement adaptée au manga car elle est la branche des mathématiques qui décrit les phénomènes dynamiques.

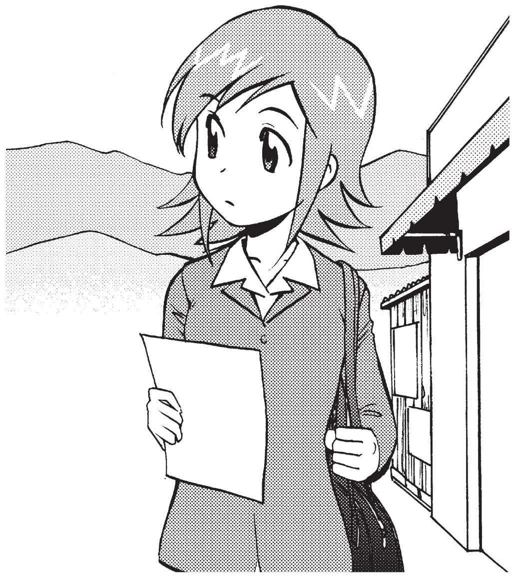
Je vous invite maintenant à tourner la page et à profiter d'un délicieux cocktail de manga et de mathématiques.

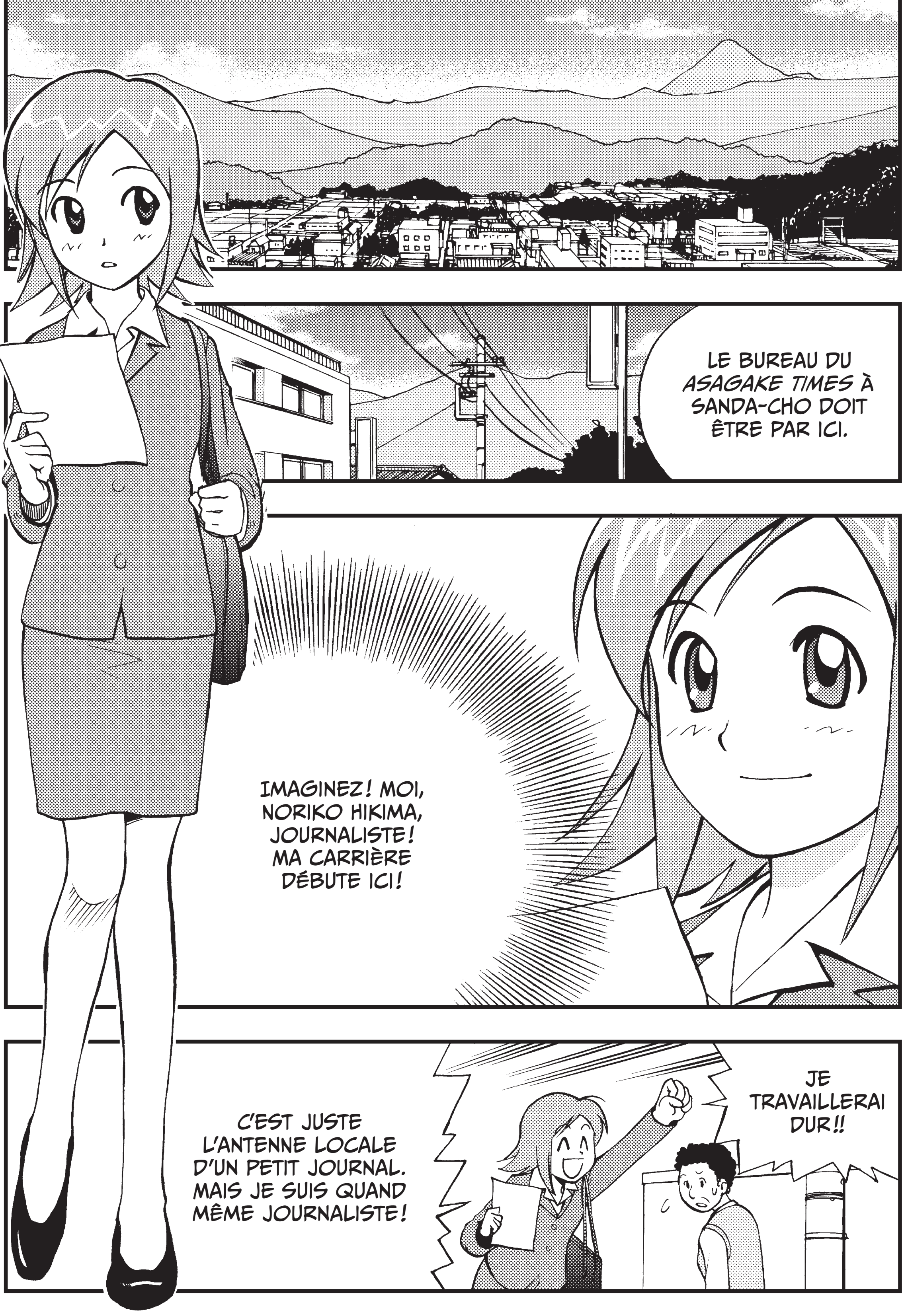
Hiroyuki Kojima

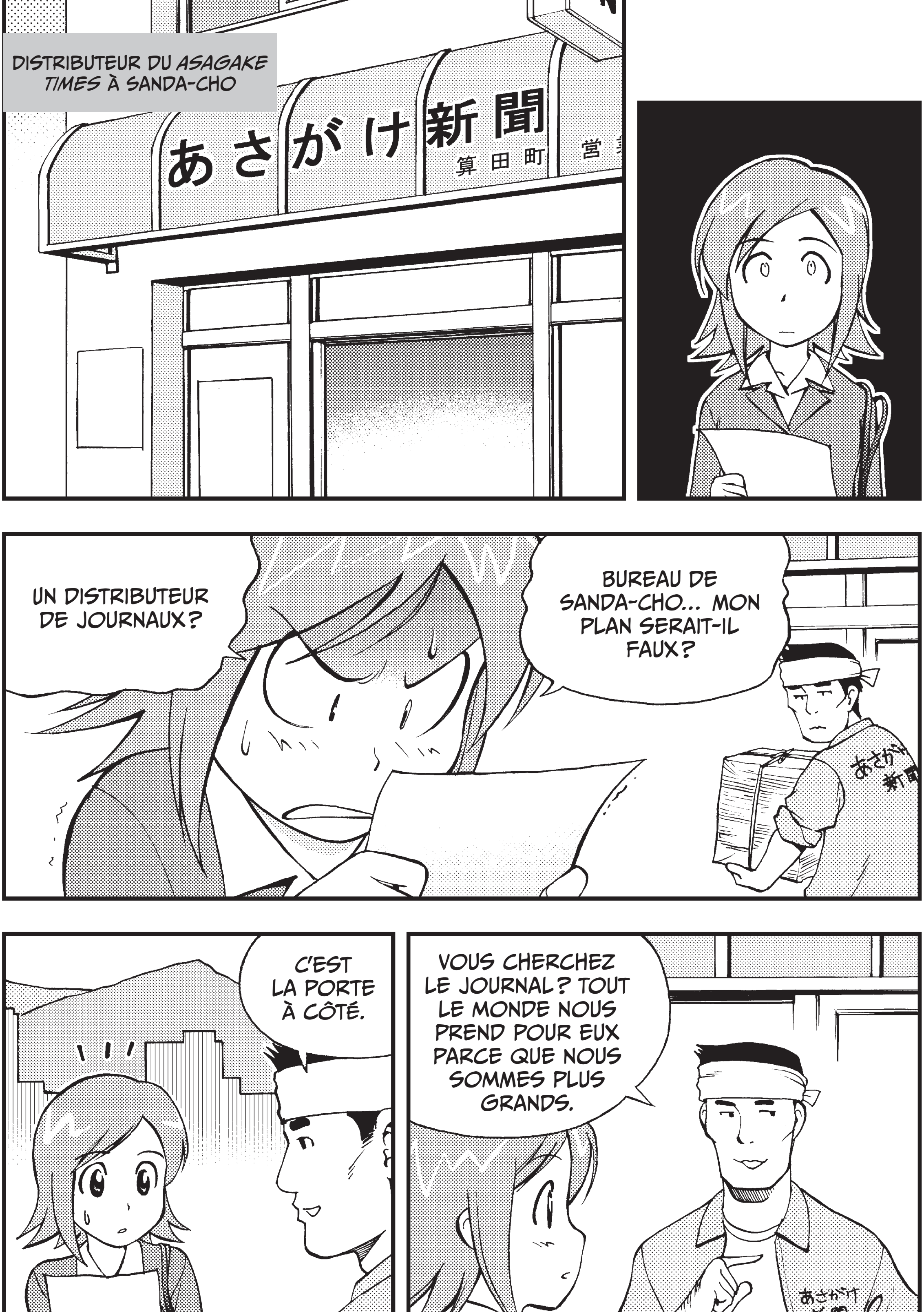
Table des matières

PROLOGUE

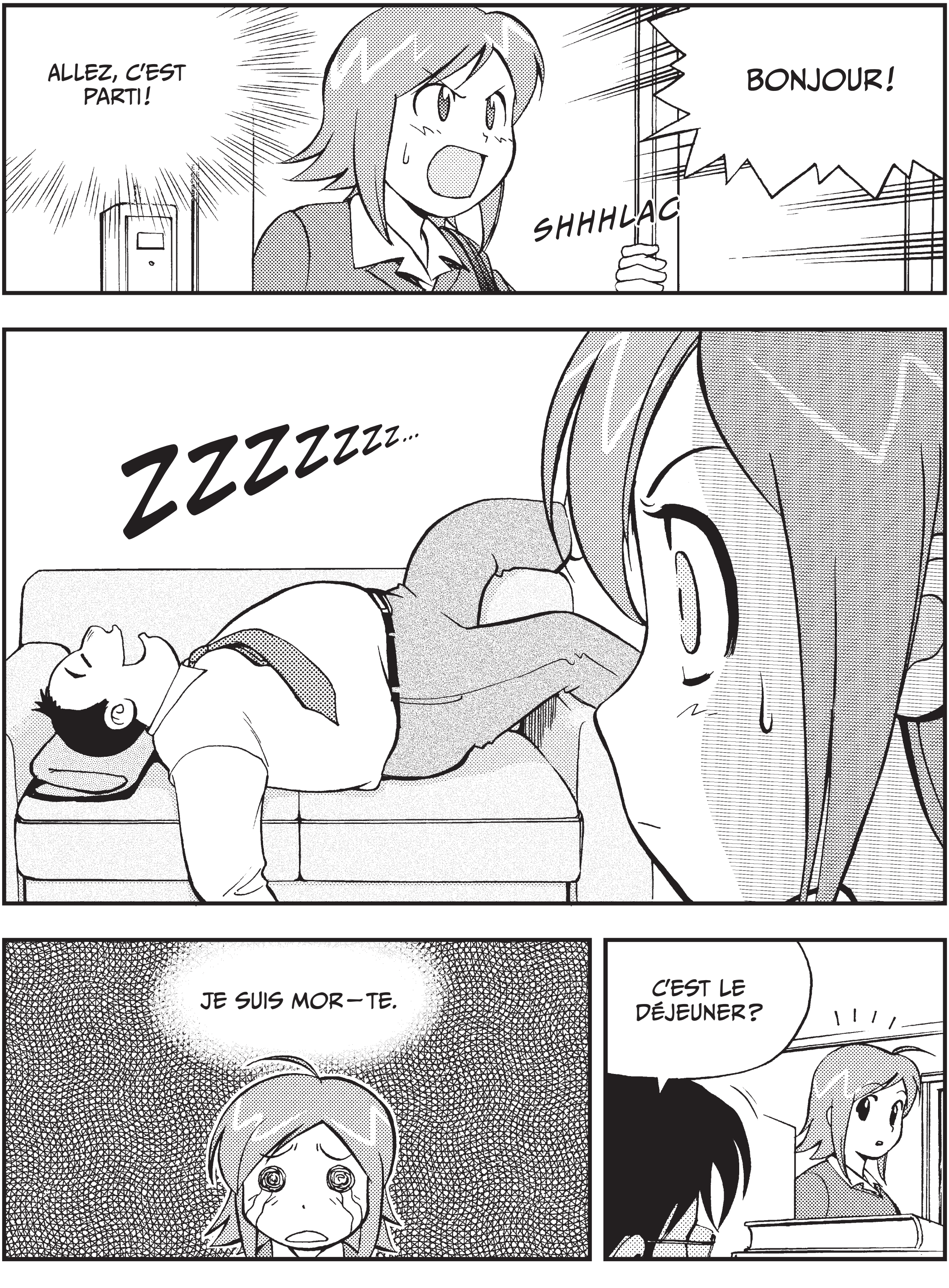
QU'EST-CE QU'UNE FONCTION?

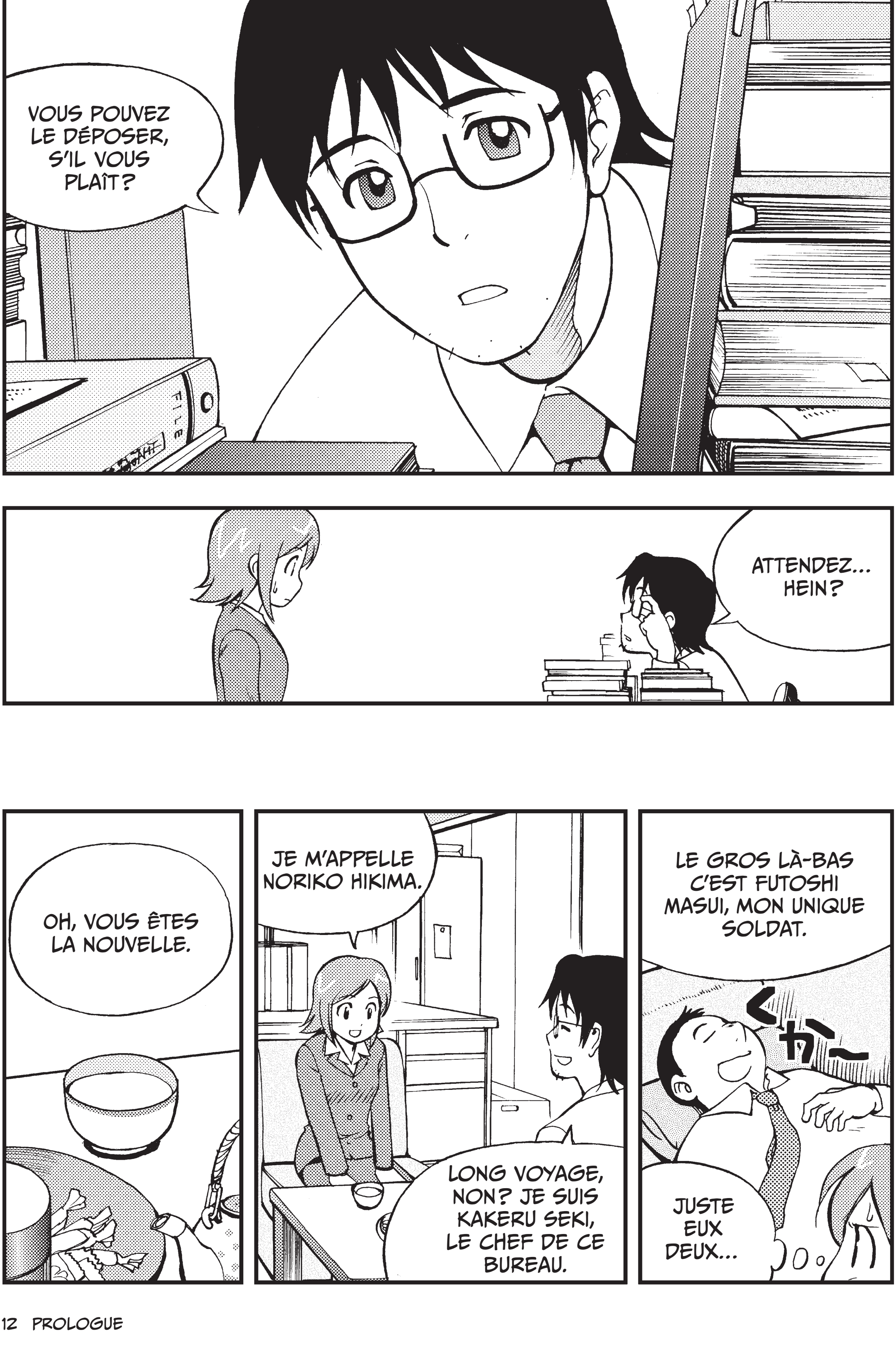


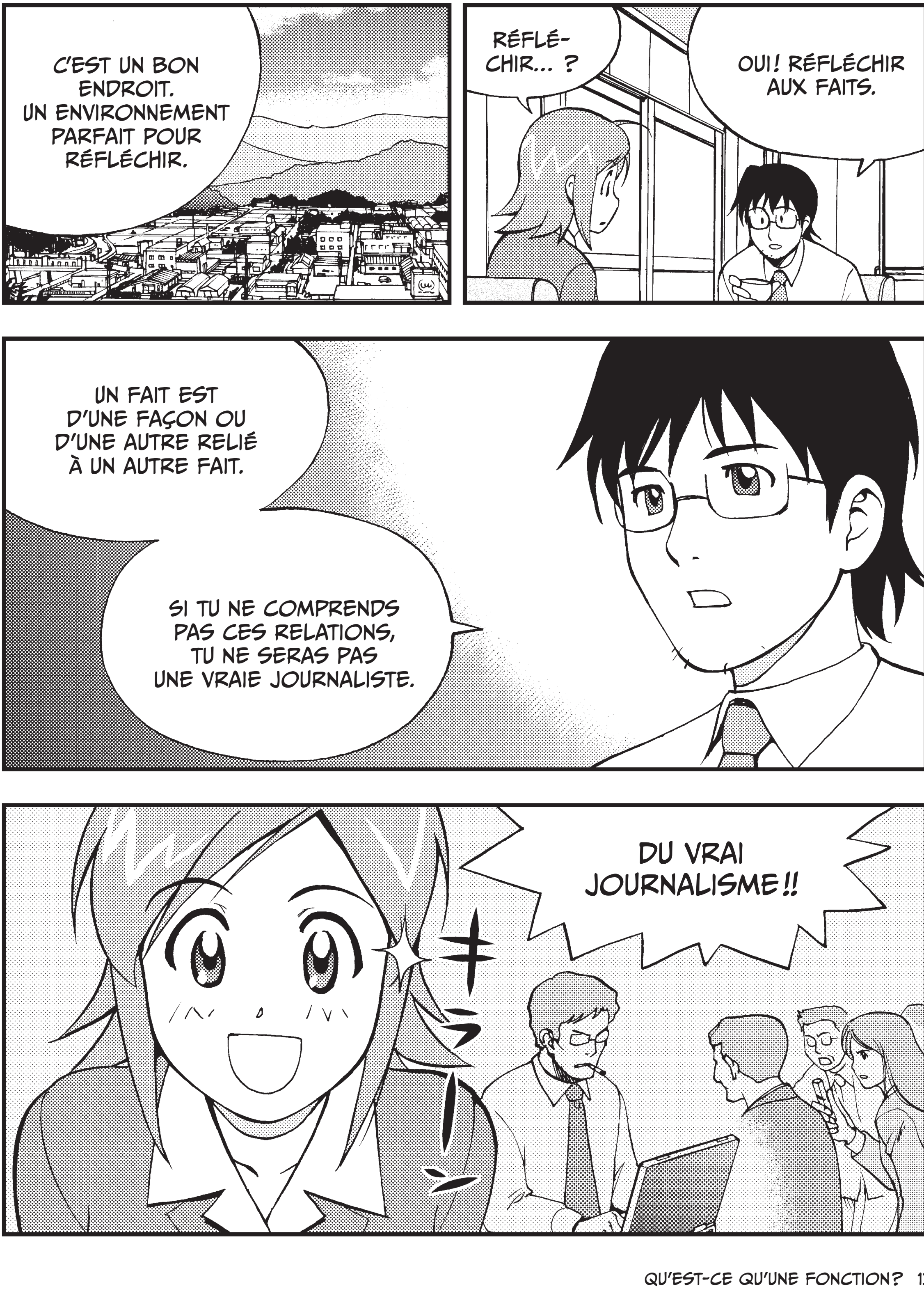

LE BUREAU DU *ASAGAKE TIMES* À SANDA-CHO DOIT ÊTRE PAR ICI.
IMAGINEZ ! MOI, NORIKO HIKIMA, JOURNALISTE ! MA CARRIÈRE DÉBUTE ICI !
JE TRAVAILLERAI DUR !!
C'EST JUSTE L'ANTENNE LOCALE D'UN PETIT JOURNAL. MAIS JE SUIS QUAND MÊME JOURNALISTE !

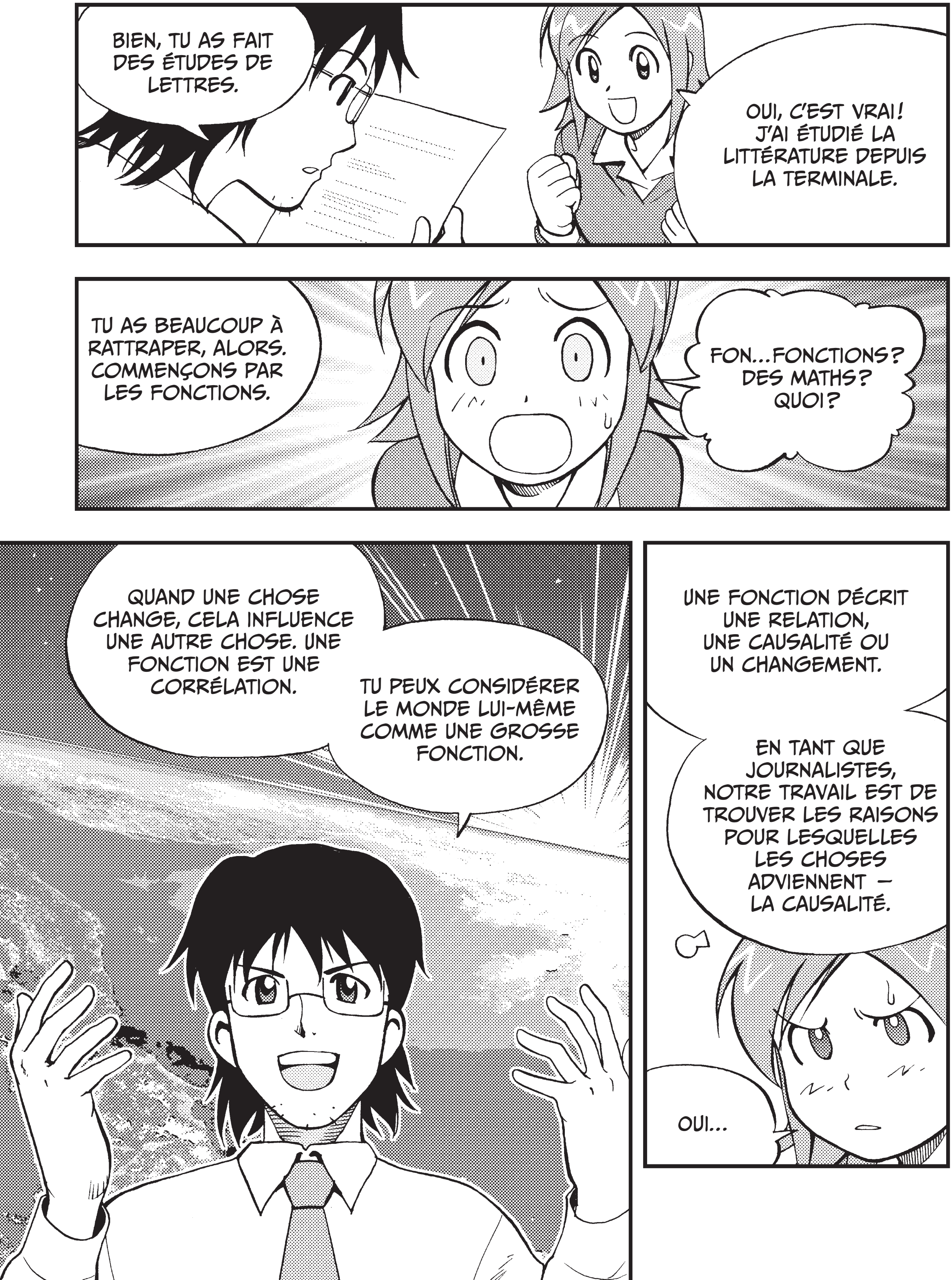

DISTRIBUTEUR DU *ASAGAKE TIMES* À SANDA-CHO
あさがけ新聞
算田町
UN DISTRIBUTEUR DE JOURNAUX?
BUREAU DE SANDA-CHO... MON PLAN SERAIT-IL FAUX?
C'EST LA PORTE À CÔTÉ.
VOUS CHERCHEZ LE JOURNAL? TOUT LE MONDE NOUS PREND POUR EUX PARCE QUE NOUS SOMMES PLUS GRANDS.

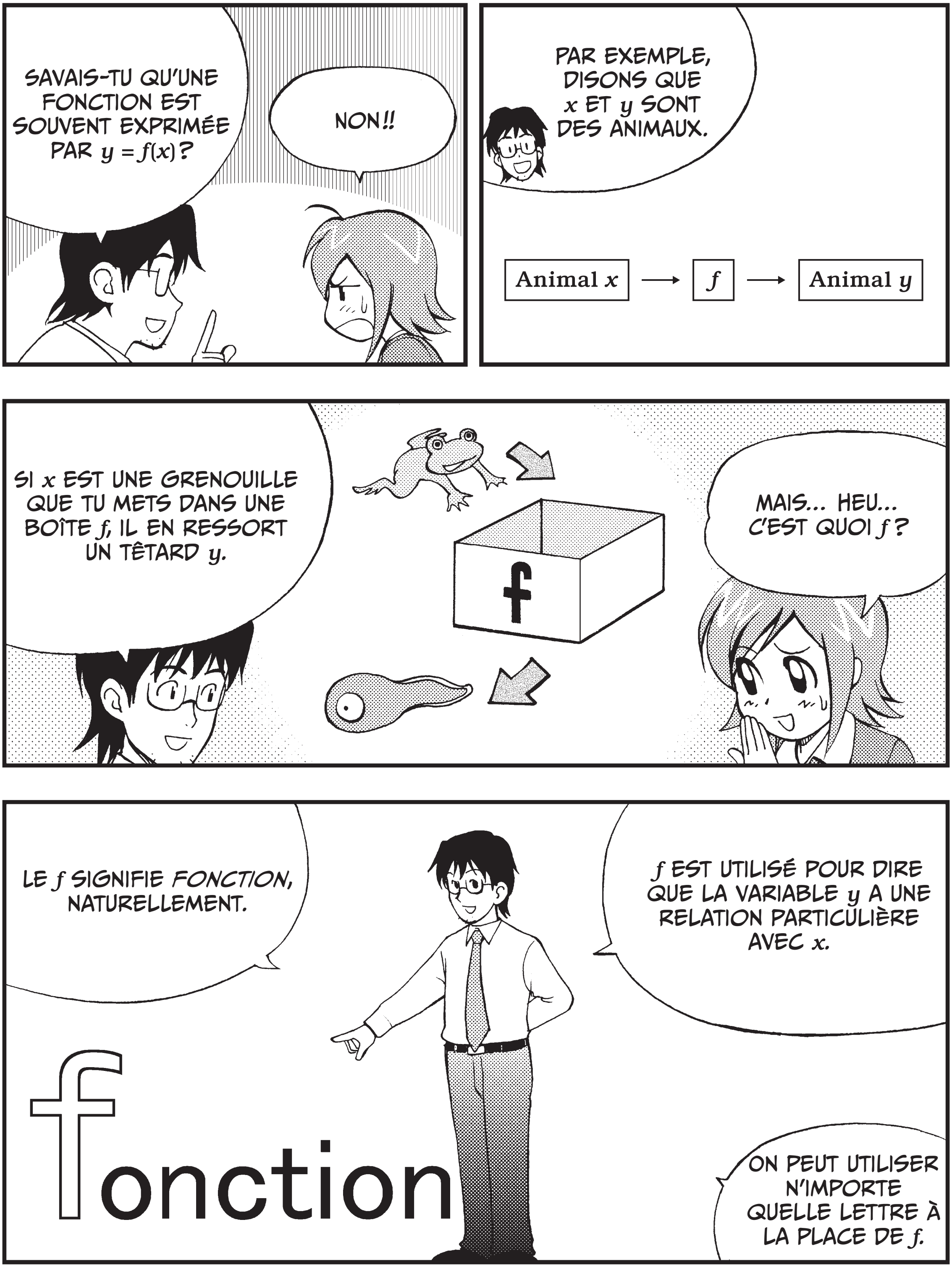

BUREAU DU *ASAGAKE TIMES* À SANDA-CHO
あさがけ新聞
算田町支局
SOUFFLE
OH, NON!! UN PRÉFABRIQUÉ!
プレハブじゃん
DU… DU CALME, NORIKO.
C'EST UNE ANTENNE LOCALE, MAIS C'EST QUAND MÊME LE VRAI *ASAGAKE TIMES*.

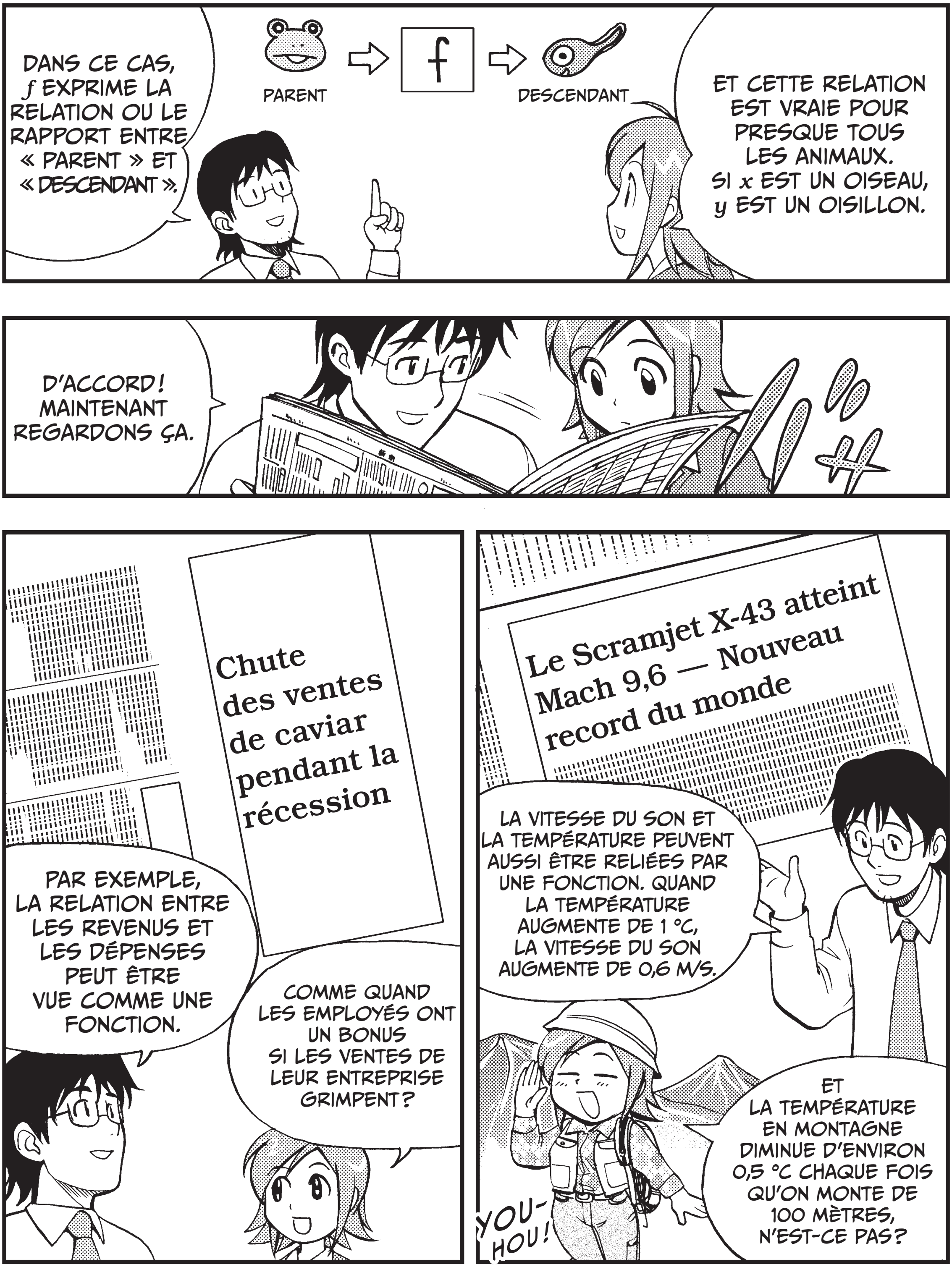

ALLEZ, C'EST PARTI!
BONJOUR!
SHHHLAC
ZZZZzzz...
JE SUIS MOR–TE.
C'EST LE DÉJEUNER?

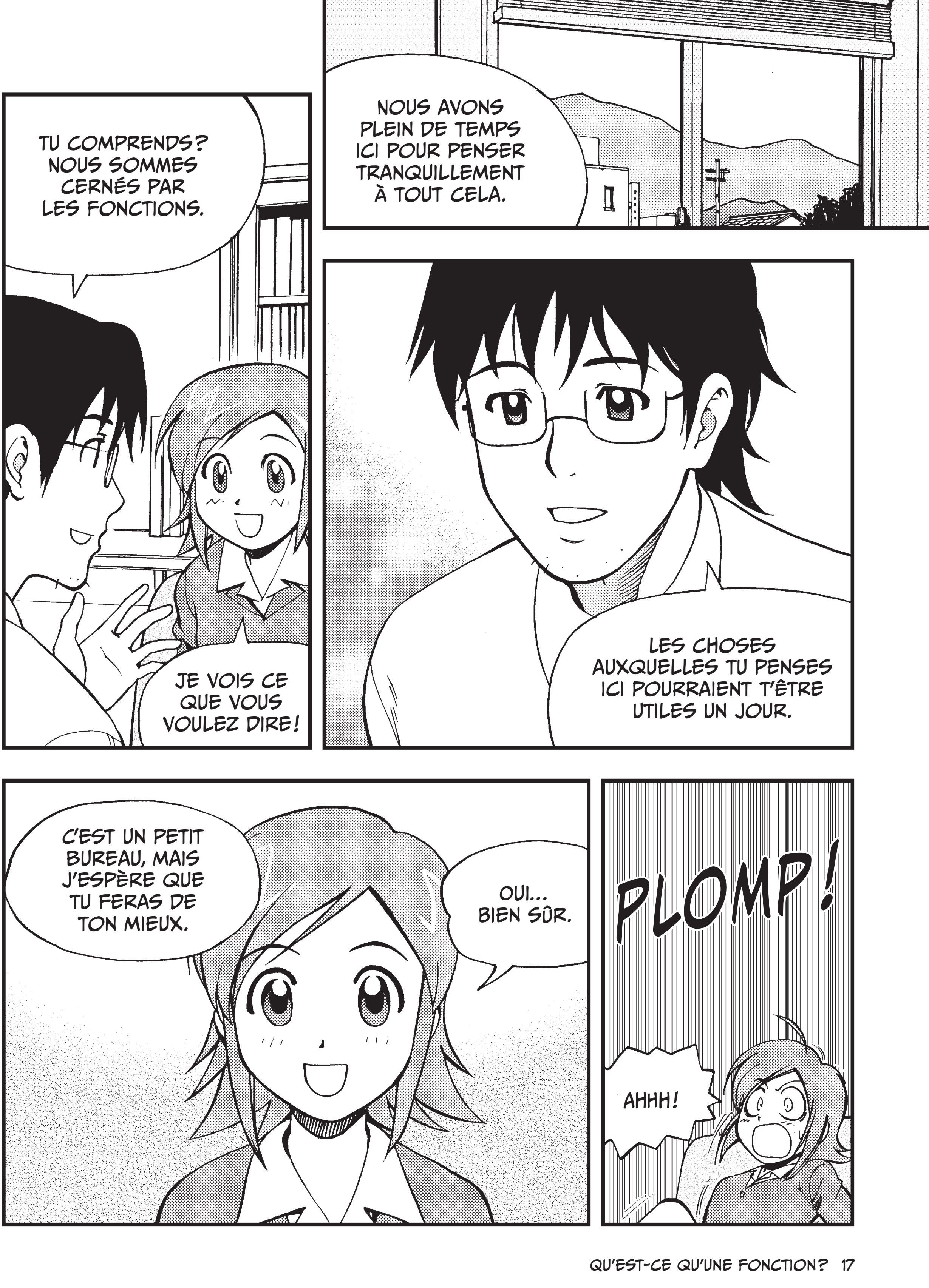

VOUS POUVEZ LE DÉPOSER, S'IL VOUS PLAÎT?
ATTENDEZ... HEIN?
OH, VOUS ÊTES LA NOUVELLE.
JE M'APPELLE NORIKO HIKIMA.
LONG VOYAGE, NON? JE SUIS KAKERU SEKI, LE CHEF DE CE BUREAU.
LE GROS LÀ-BAS C'EST FUTOSHI MASUI, MON UNIQUE SOLDAT.
くか〜
JUSTE EUX DEUX...


C'EST UN BON ENDROIT.
UN ENVIRONNEMENT PARFAIT POUR RÉFLÉCHIR.
RÉFLÉ-CHIR... ?
OUI! RÉFLÉCHIR AUX FAITS.
UN FAIT EST D'UNE FAÇON OU D'UNE AUTRE RELIÉ À UN AUTRE FAIT.
SI TU NE COMPRENDS PAS CES RELATIONS, TU NE SERAS PAS UNE VRAIE JOURNALISTE.
DU VRAI JOURNALISME!!
キラーン


BIEN, TU AS FAIT DES ÉTUDES DE LETTRES.
OUI, C'EST VRAI! J'AI ÉTUDIÉ LA LITTÉRATURE DEPUIS LA TERMINALE.
TU AS BEAUCOUP À RATTRAPER, ALORS. COMMENÇONS PAR LES FONCTIONS.
FON...FONCTIONS? DES MATHS? QUOI?
QUAND UNE CHOSE CHANGE, CELA INFLUENCE UNE AUTRE CHOSE. UNE FONCTION EST UNE CORRÉLATION.
TU PEUX CONSIDÉRER LE MONDE LUI-MÊME COMME UNE GROSSE FONCTION.
UNE FONCTION DÉCRIT UNE RELATION, UNE CAUSALITÉ OU UN CHANGEMENT.
EN TANT QUE JOURNALISTES, NOTRE TRAVAIL EST DE TROUVER LES RAISONS POUR LESQUELLES LES CHOSES ADVIENNENT — LA CAUSALITÉ.
OUI...


SAVAIS-TU QU'UNE FONCTION EST SOUVENT EXPRIMÉE PAR $y = f(x)$?
NON!!
PAR EXEMPLE, DISONS QUE x ET y SONT DES ANIMAUX.
Animal x → f → Animal y
SI x EST UNE GRENOUILLE QUE TU METS DANS UNE BOÎTE f, IL EN RESSORT UN TÊTARD y.
f
MAIS... HEU... C'EST QUOI f?
LE f SIGNIFIE *FONCTION*, NATURELLEMENT.
f EST UTILISÉ POUR DIRE QUE LA VARIABLE y A UNE RELATION PARTICULIÈRE AVEC x.
fonction
ON PEUT UTILISER N'IMPORTE QUELLE LETTRE À LA PLACE DE f.


DANS CE CAS, f EXPRIME LA RELATION OU LE RAPPORT ENTRE « PARENT » ET « DESCENDANT ».
PARENT
f
DESCENDANT
ET CETTE RELATION EST VRAIE POUR PRESQUE TOUS LES ANIMAUX. SI x EST UN OISEAU, y EST UN OISILLON.
D'ACCORD ! MAINTENANT REGARDONS ÇA.
Chute des ventes de caviar pendant la récession
PAR EXEMPLE, LA RELATION ENTRE LES REVENUS ET LES DÉPENSES PEUT ÊTRE VUE COMME UNE FONCTION.
COMME QUAND LES EMPLOYÉS ONT UN BONUS SI LES VENTES DE LEUR ENTREPRISE GRIMPENT ?
Le Scramjet X-43 atteint Mach 9,6 — Nouveau record du monde
LA VITESSE DU SON ET LA TEMPÉRATURE PEUVENT AUSSI ÊTRE RELIÉES PAR UNE FONCTION. QUAND LA TEMPÉRATURE AUGMENTE DE 1 °C, LA VITESSE DU SON AUGMENTE DE 0,6 M/S.
YOU-HOU !
ET LA TEMPÉRATURE EN MONTAGNE DIMINUE D'ENVIRON 0,5 °C CHAQUE FOIS QU'ON MONTE DE 100 MÈTRES, N'EST-CE PAS ?


NOUS AVONS PLEIN DE TEMPS ICI POUR PENSER TRANQUILLEMENT À TOUT CELA.
TU COMPRENDS? NOUS SOMMES CERNÉS PAR LES FONCTIONS.
JE VOIS CE QUE VOUS VOULEZ DIRE!
LES CHOSES AUXQUELLES TU PENSES ICI POURRAIENT T'ÊTRE UTILES UN JOUR.
C'EST UN PETIT BUREAU, MAIS J'ESPÈRE QUE TU FERAS DE TON MIEUX.
OUI... BIEN SÛR.
PLOMP!
AHHH!

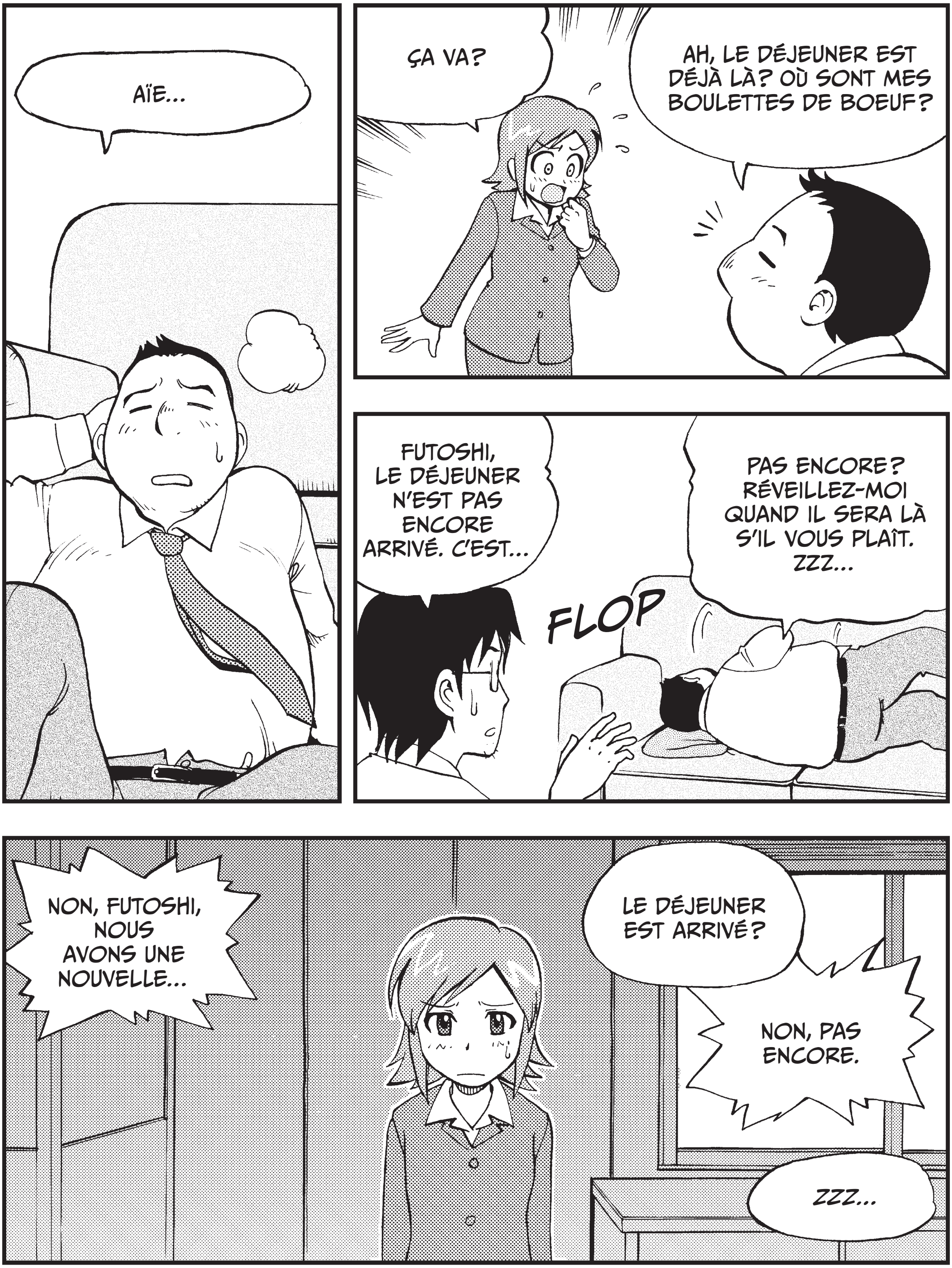
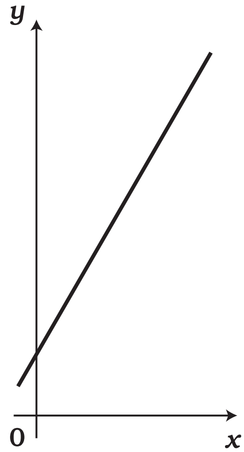
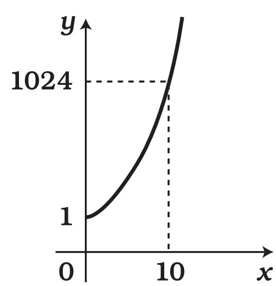
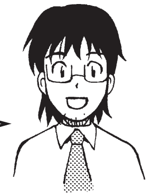

AÏE...
ÇA VA?
AH, LE DÉJEUNER EST DÉJÀ LÀ? OÙ SONT MES BOULETTES DE BOEUF?
FUTOSHI, LE DÉJEUNER N'EST PAS ENCORE ARRIVÉ. C'EST...
PAS ENCORE? RÉVEILLEZ-MOI QUAND IL SERA LÀ S'IL VOUS PLAÎT. ZZZ...
FLOP
NON, FUTOSHI, NOUS AVONS UNE NOUVELLE...
LE DÉJEUNER EST ARRIVÉ?
NON, PAS ENCORE.
ZZZ...

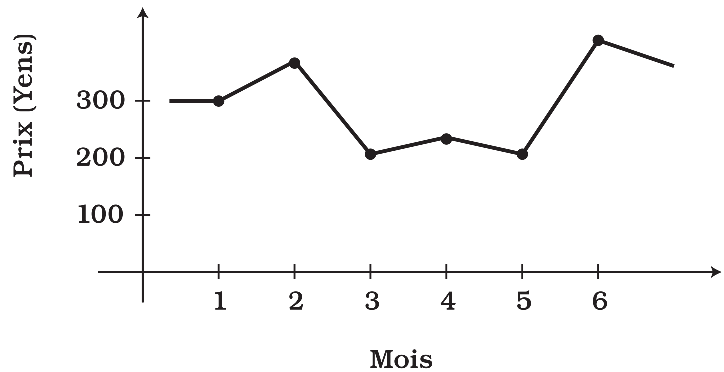
TABLEAU 1 : CARACTÉRISTIQUES DES FONCTIONS

DOMAINE	CALCUL	GRAPHE
Causalité	La fréquence des stridulations d'un grillon est déterminée par la température. On peut exprimer la relation entre y stridulations par minute et la température x °C à peu près par $y = g(x) = 7x - 30$ $x = 27$ °C $7 \times 27 - 30$ À 27 °C : 159 stridulations par minute.	Quand on trace ces fonctions, on obtient une droite. On les appelle des fonctions affines. 
Variation	La vitesse du son y en mètre par seconde (m/s) dans l'air à x °C est donnée par $y = v(x) = 0{,}6x + 331$ À 15 °C, $y = v(15) = 0{,}6 \times 15 + 331 = 340$ m/s À –5 °C, $y = v(-5) = 0{,}6 \times (-5) + 331 = 328$ m/s	
Conversion d'unités	Convertir x degrés Fahrenheit (°F) en y degrés Celsius (°C) $y = f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ 50 °F correspond donc à $\frac{5}{9}(50 - 32) = 10$ °C	
	Les ordinateurs stockent les nombres comme des suites de 0 et de 1. Avec x bits (de l'anglais binary digits, « chiffres binaires ») on peut décrire y nombres différents, où $y = b(x) = 2^x$ (Ceci sera développé page 135.)	Le graphe est celui d'une exponentielle. 



LES GRAPHES DE CERTAINES FONCTIONS NE SONT NI DES DROITES, NI DES COURBES À L'ALLURE RÉGULIÈRE.

Le prix P d'une action d'une entreprise A au mois x de 2017 s'écrit $y = P(x)$



$P(x)$ ne peut pas s'exprimer avec des fonctions de référence, mais c'est quand même une fonction.

Si vous pouviez trouver un moyen de prédire $P(7)$, le prix de l'action en juillet, vous pourriez gagner beaucoup d'argent.

COMBINER DEUX FONCTIONS OU PLUS S'APPELLE « COMPOSER DES FONCTIONS ». CELA PERMET D'ÉTENDRE LA PORTÉE DE LA CAUSALITÉ.

La composée de f et g

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(x) \longrightarrow \boxed{g} \longrightarrow g(f(x))$$

Exercice (solution page 229)

1. Trouver une équation qui donne, pour un grillon, la fréquence z en stridulations/minute à x °F.

5 Théorème des accroissements finis

On a vu que la dérivée est le coefficient de x dans la fonction affine qui approche $f(x)$ au voisinage de $x = a$.

C'est-à-dire :

$$f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a) \quad \text{(quand } x \text{ est très proche de } a\text{)}$$

Mais la fonction affine se contente d'approcher, d'imiter $f(x)$; lorsque b est proche de a, en général,

❶ $$f(b) \neq f'(a)(b-a) + f(a)$$

Ce n'est donc pas vraiment une équation.

THÉORÈME 2-3 : THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

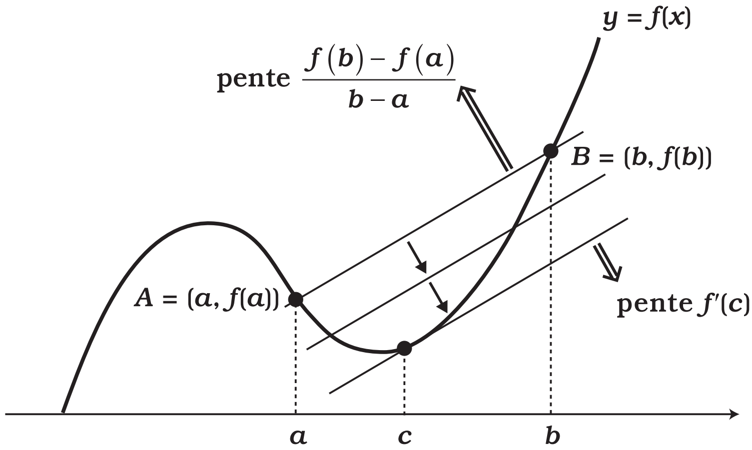
Si $a < b$, il existe un c entre a et b $(a < c < b)$ tel que

$$f(b) = f'(c)(b-a) + f(a)$$

Autrement dit, l'expression ❶ peut s'écrire avec un signe égal : pas avec $f'(a)$, mais avec $f'(c)$ où c est quelque part entre a et b.*

* En termes géométriques, il existe une valeur de x comprise entre a et b (on la note c) où la tangente à la courbe a la même pente que la droite reliant les points A et B (d'abscisses a et b).

Traçons la droite qui relie les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.



On sait que la pente vaut simplement $\Delta y / \Delta x$:

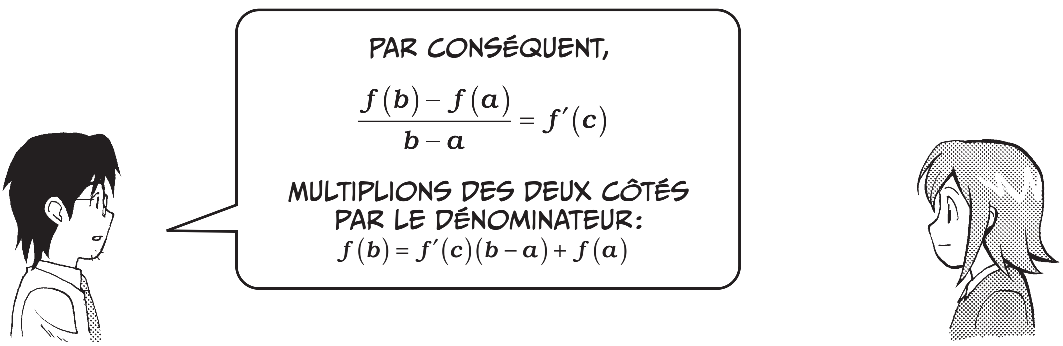
$$❷ \quad \text{Pente de } (AB) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

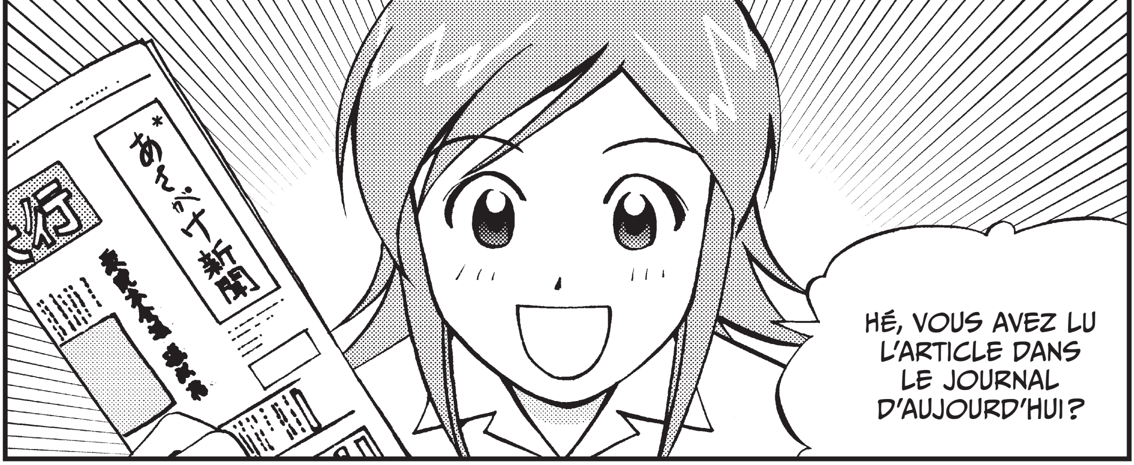
Maintenant, translatons la droite (AB) comme montré sur le dessin.

On finit par arriver à un point qu'on ne peut pas dépasser sans quitter la courbe. Notons ce point $(c, f(c))$.

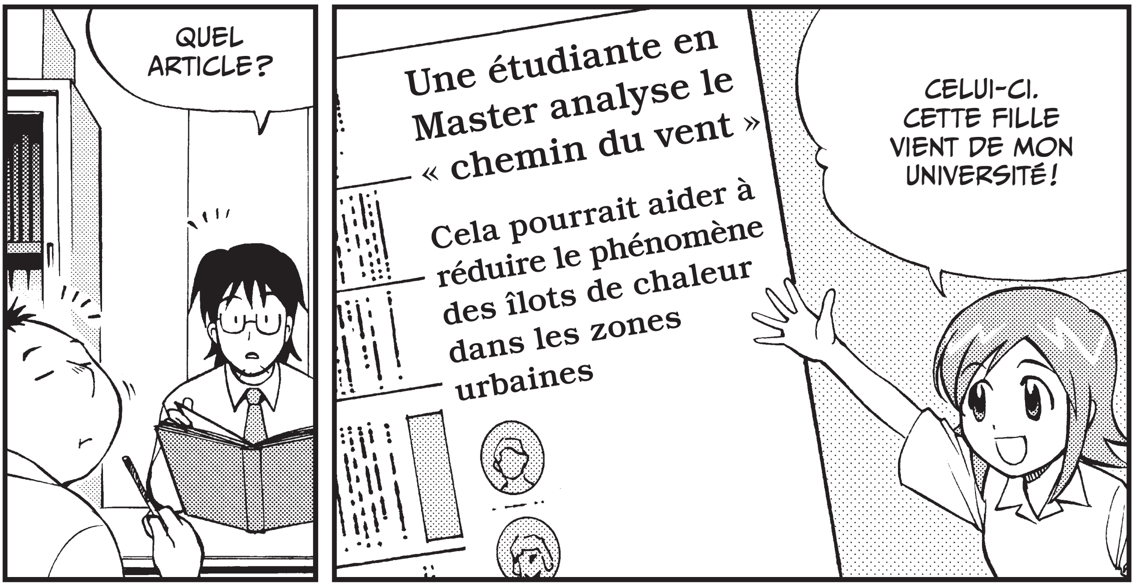
À cet endroit, la droite est tangente à la courbe donc sa pente est $f'(c)$.

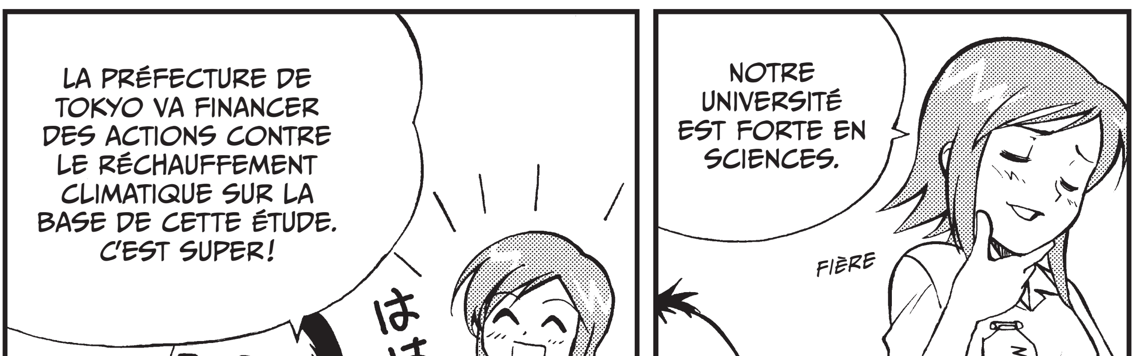
Comme cette droite est parallèle à (AB), sa pente est encore ❷.

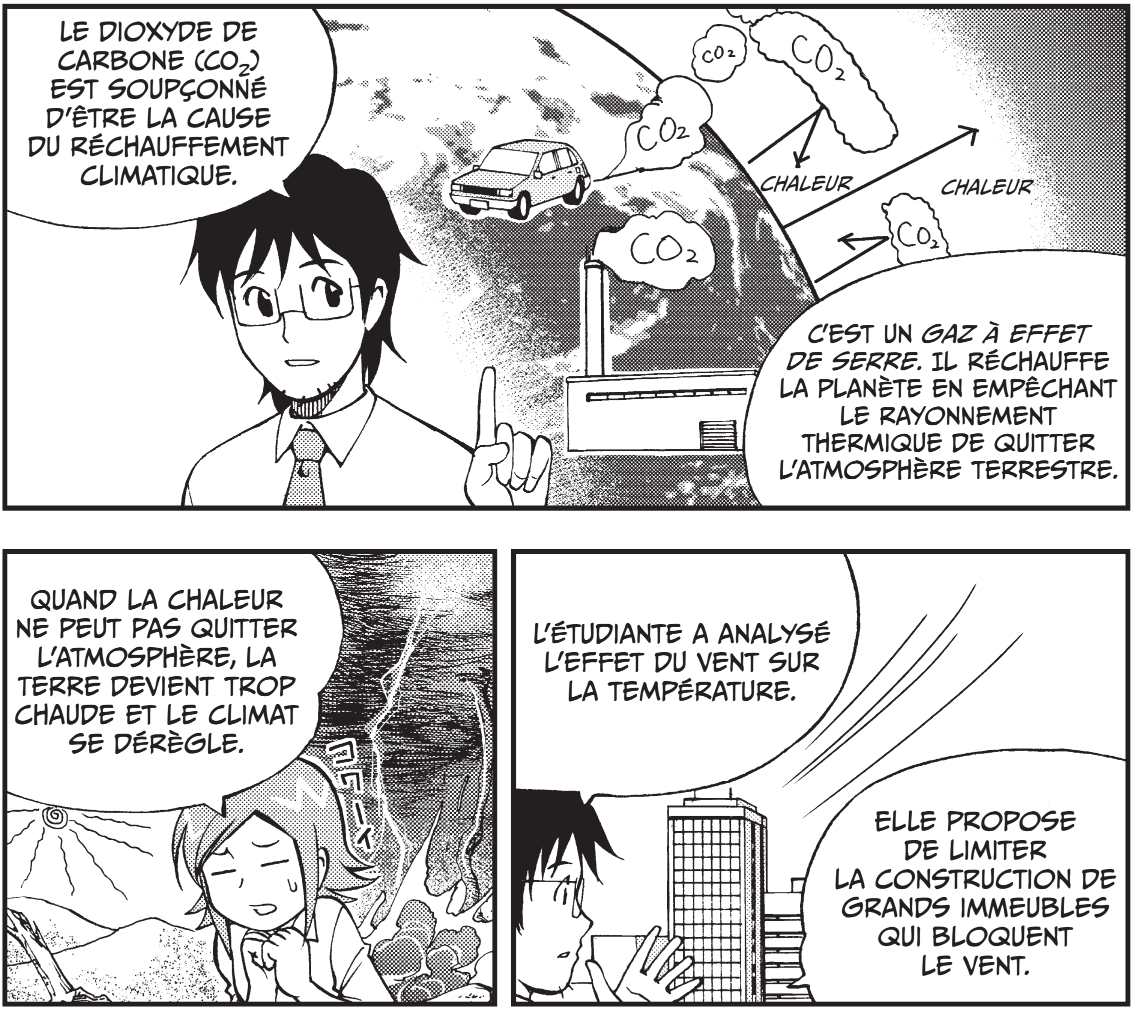


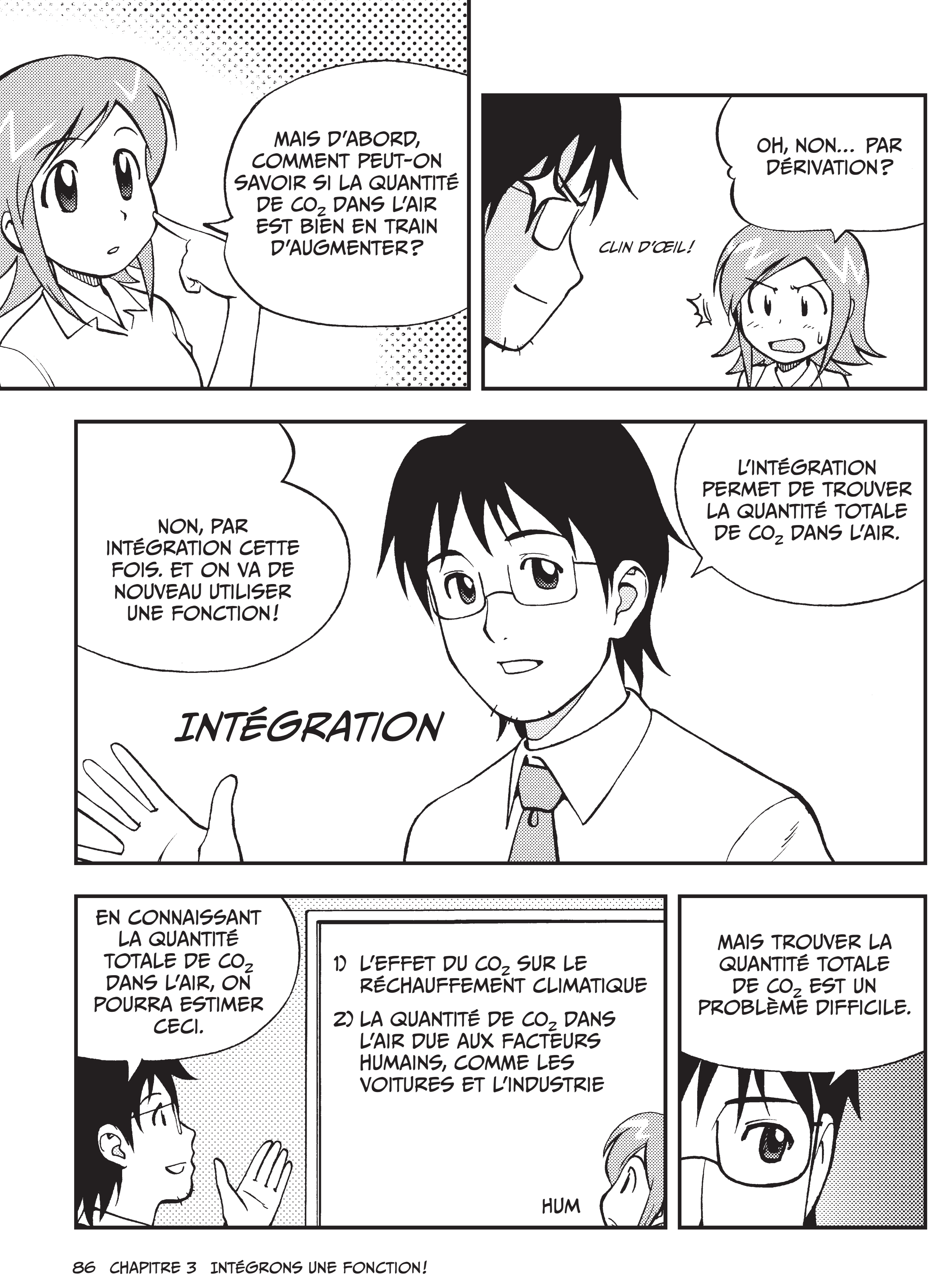


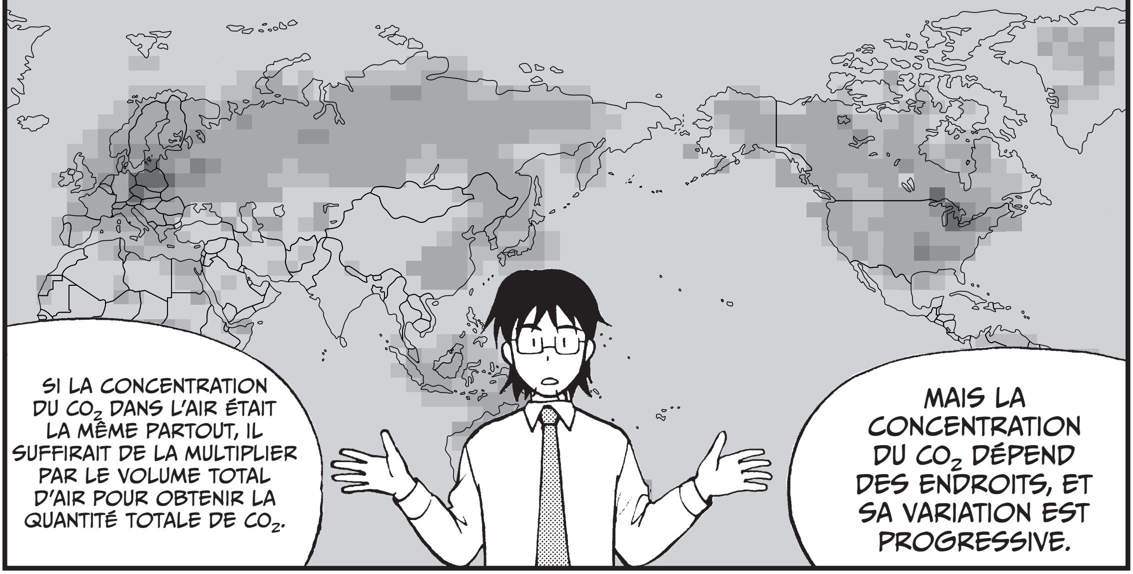
* LE ASAGAKE TIMES

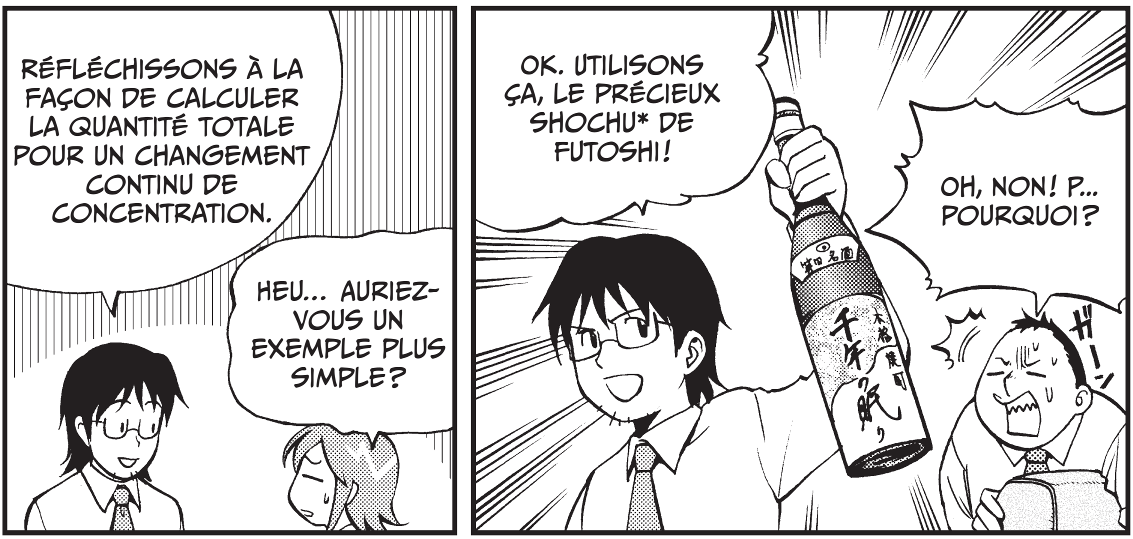




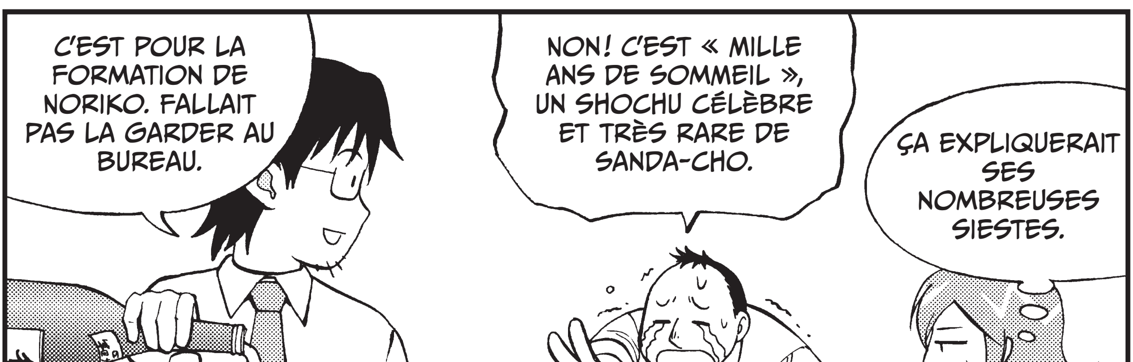

LE DIOXYDE DE CARBONE (CO_2) EST SOUPÇONNÉ D'ÊTRE LA CAUSE DU RÉCHAUFFEMENT CLIMATIQUE.
CO_2
CO_2
CO_2
CO_2
CO_2
CHALEUR
CHALEUR
C'EST UN *GAZ À EFFET DE SERRE*. IL RÉCHAUFFE LA PLANÈTE EN EMPÊCHANT LE RAYONNEMENT THERMIQUE DE QUITTER L'ATMOSPHÈRE TERRESTRE.
QUAND LA CHALEUR NE PEUT PAS QUITTER L'ATMOSPHÈRE, LA TERRE DEVIENT TROP CHAUDE ET LE CLIMAT SE DÉRÈGLE.
L'ÉTUDIANTE A ANALYSÉ L'EFFET DU VENT SUR LA TEMPÉRATURE.
ELLE PROPOSE DE LIMITER LA CONSTRUCTION DE GRANDS IMMEUBLES QUI BLOQUENT LE VENT.
ELLE ESPÈRE QU'UN VENT SOUFFLANT SANS OBSTACLE SUR LES CÔTES ET LES RIVIÈRES RALENTIRA LA HAUSSE DE LA TEMPÉRATURE AU SOL.
C'EST DUR DE RÉDUIRE LES ÉMISSIONS DE CO_2 DE NOS JOURS.
MAIS TOUT LE MONDE DEVRAIT ESSAYER DE LE FAIRE.


MAIS D'ABORD, COMMENT PEUT-ON SAVOIR SI LA QUANTITÉ DE CO_2 DANS L'AIR EST BIEN EN TRAIN D'AUGMENTER?
OH, NON... PAR DÉRIVATION?
CLIN D'ŒIL!
NON, PAR INTÉGRATION CETTE FOIS. ET ON VA DE NOUVEAU UTILISER UNE FONCTION!
L'INTÉGRATION PERMET DE TROUVER LA QUANTITÉ TOTALE DE CO_2 DANS L'AIR.
INTÉGRATION
EN CONNAISSANT LA QUANTITÉ TOTALE DE CO_2 DANS L'AIR, ON POURRA ESTIMER CECI.
1) L'EFFET DU CO_2 SUR LE RÉCHAUFFEMENT CLIMATIQUE
2) LA QUANTITÉ DE CO_2 DANS L'AIR DUE AUX FACTEURS HUMAINS, COMME LES VOITURES ET L'INDUSTRIE
HUM
MAIS TROUVER LA QUANTITÉ TOTALE DE CO_2 EST UN PROBLÈME DIFFICILE.

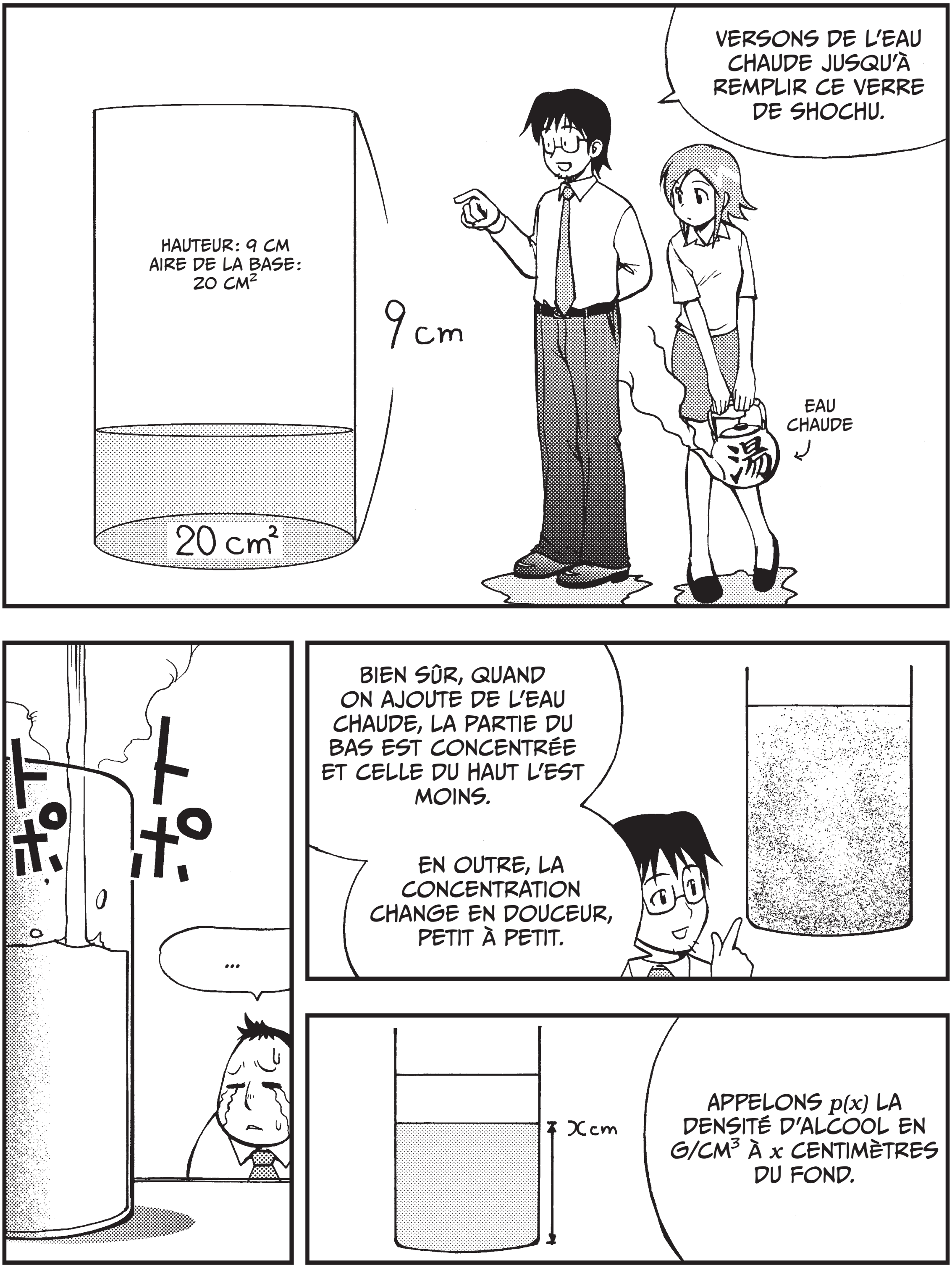


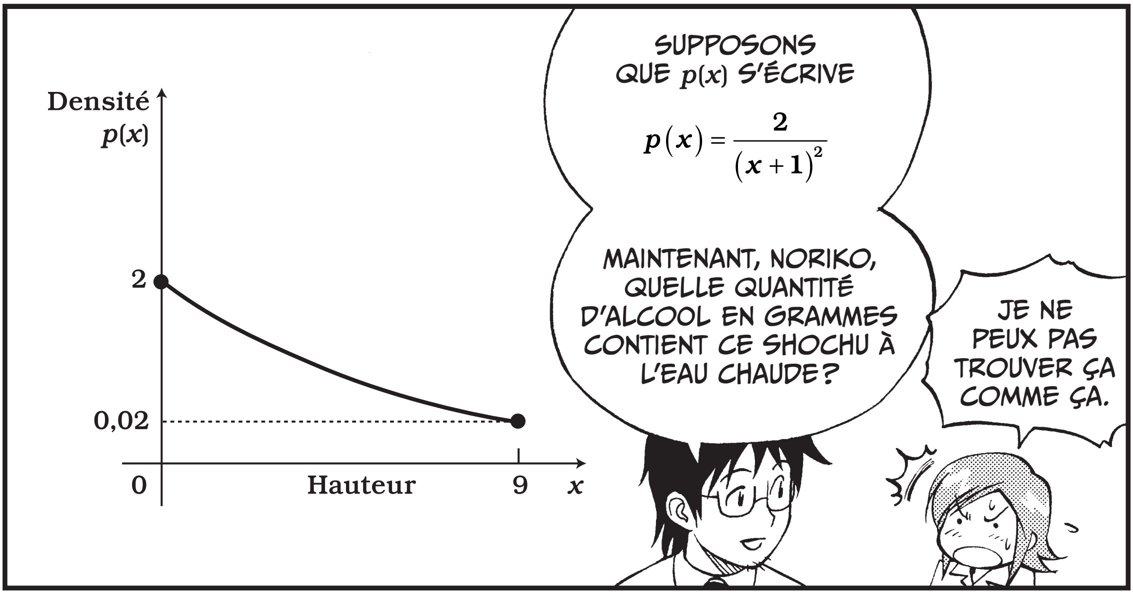


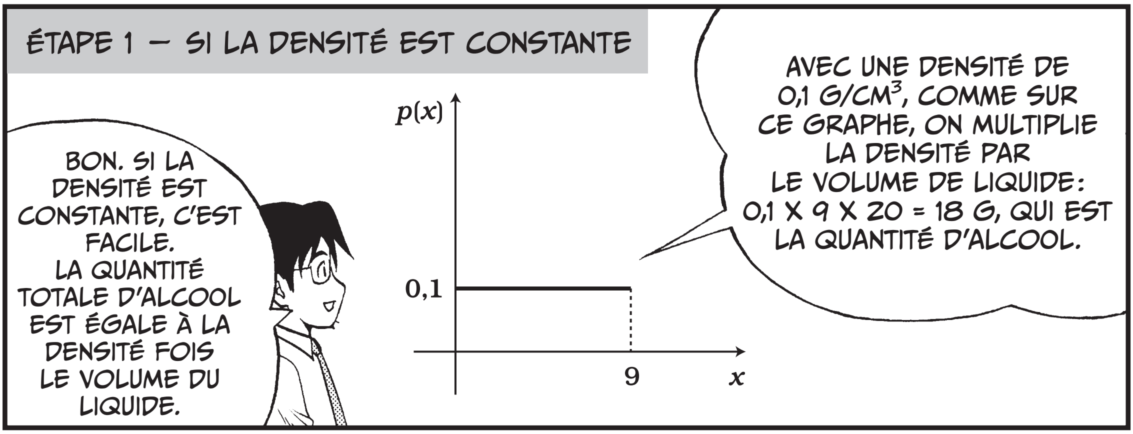
* UNE EAU-DE-VIE JAPONAISE

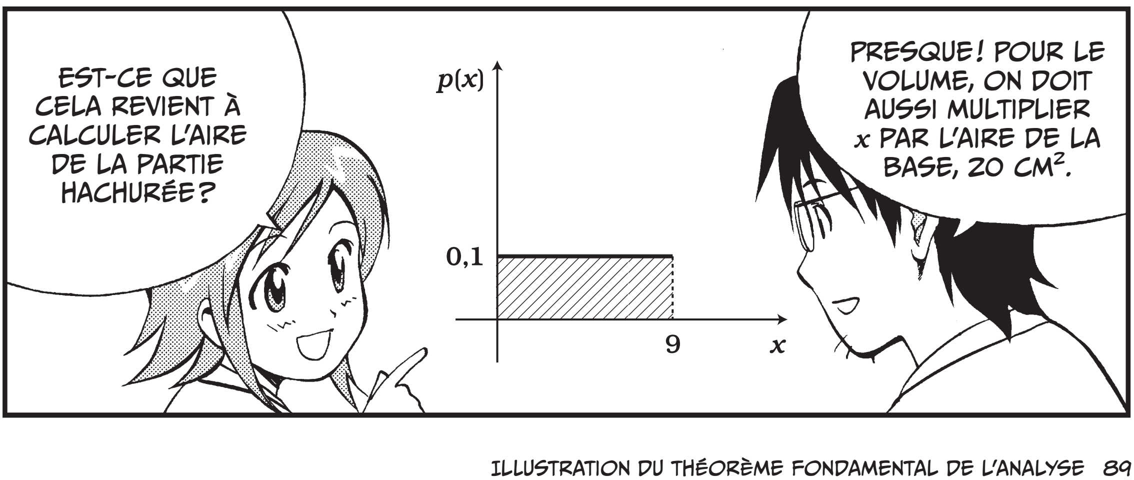


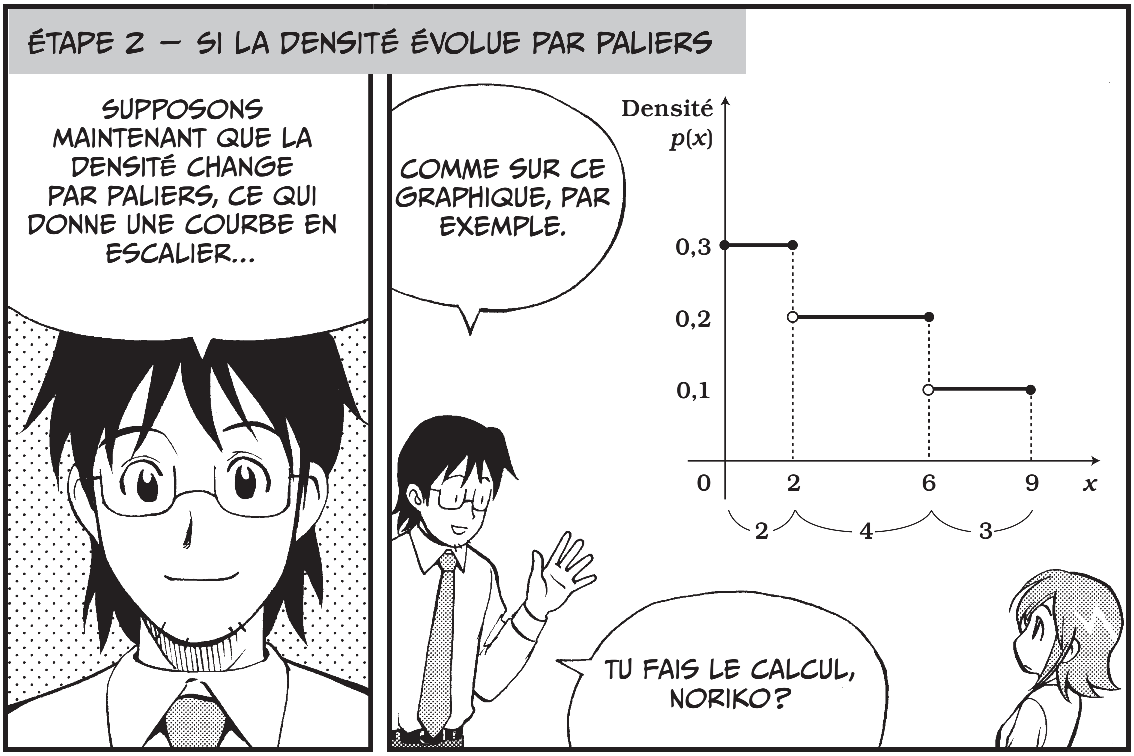
1 Illustration du théorème fondamental de l'analyse

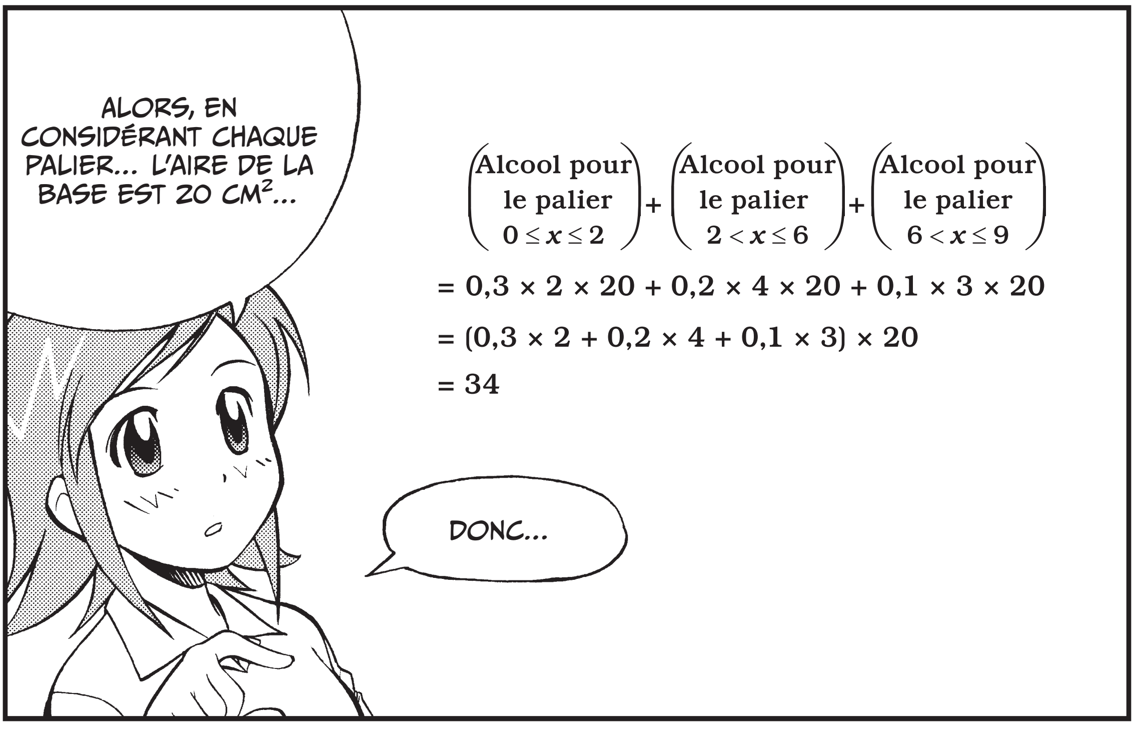


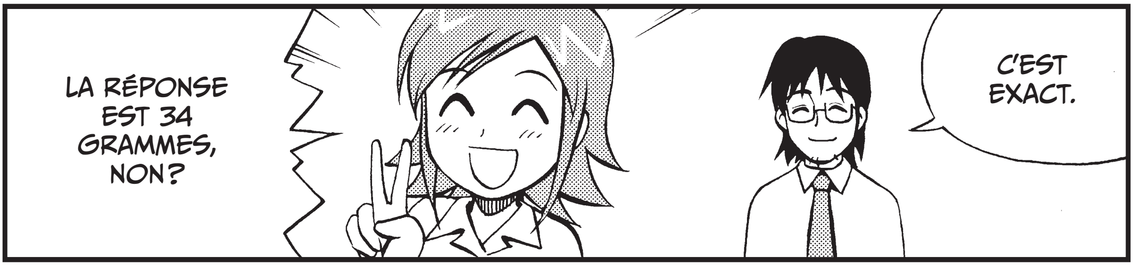

Densité
$p(x)$
2
0,02
0
Hauteur
9
x
SUPPOSONS QUE $p(x)$ S'ÉCRIVE
$$p(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$
MAINTENANT, NORIKO, QUELLE QUANTITÉ D'ALCOOL EN GRAMMES CONTIENT CE SHOCHU À L'EAU CHAUDE?
JE NE PEUX PAS TROUVER ÇA COMME ÇA.

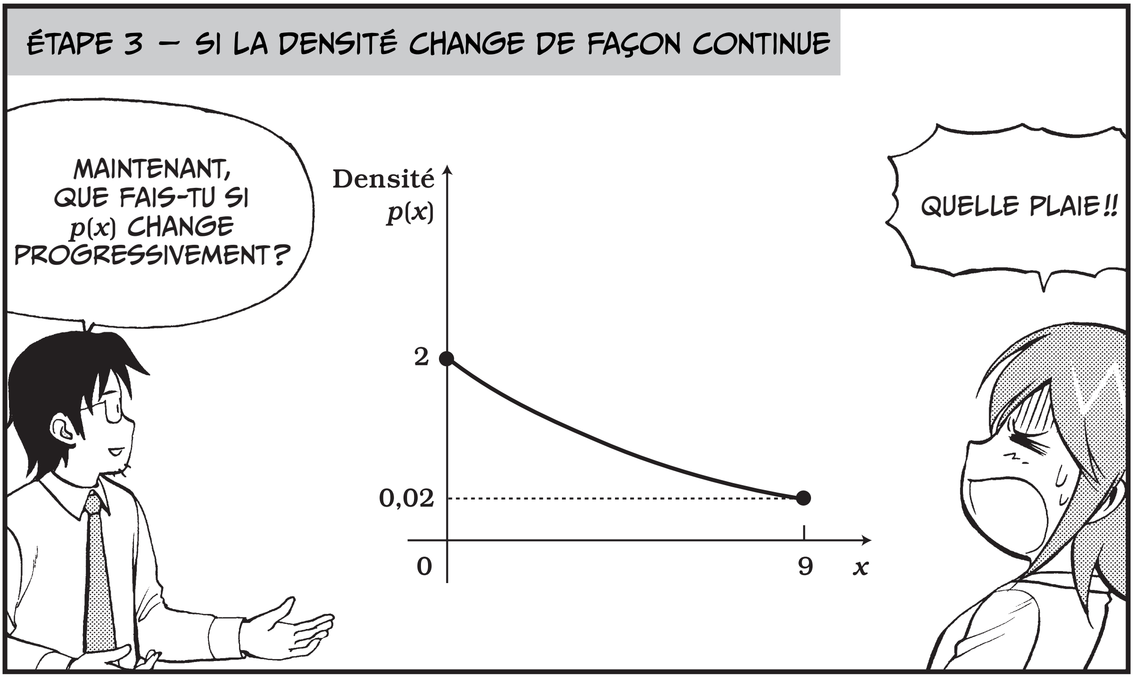

ÉTAPE 1 — SI LA DENSITÉ EST CONSTANTE
BON. SI LA DENSITÉ EST CONSTANTE, C'EST FACILE. LA QUANTITÉ TOTALE D'ALCOOL EST ÉGALE À LA DENSITÉ FOIS LE VOLUME DU LIQUIDE.
$p(x)$
0,1
9
x
AVEC UNE DENSITÉ DE 0,1 G/CM^3, COMME SUR CE GRAPHE, ON MULTIPLIE LA DENSITÉ PAR LE VOLUME DE LIQUIDE: 0,1 X 9 X 20 = 18 G, QUI EST LA QUANTITÉ D'ALCOOL.

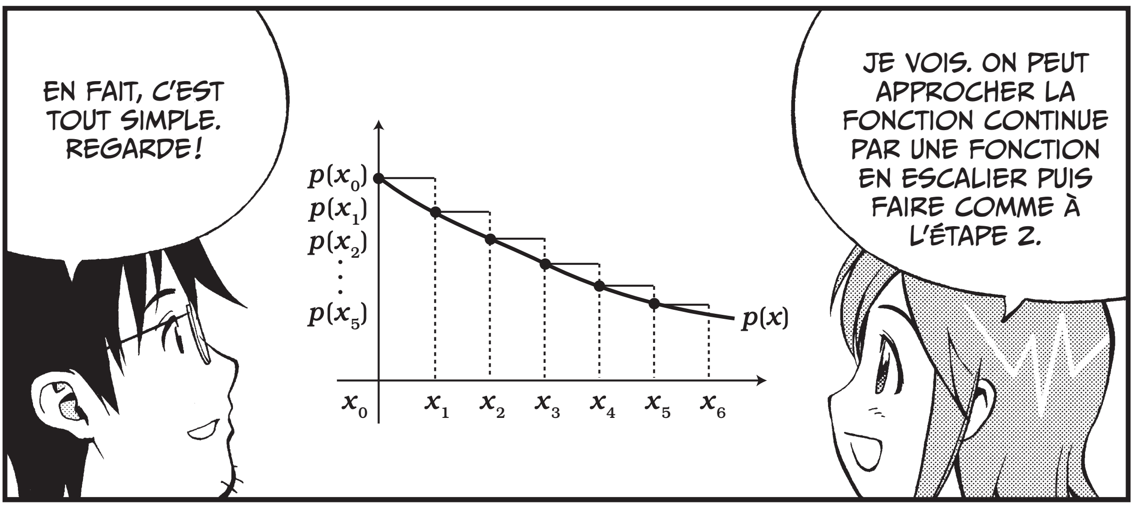

EST-CE QUE CELA REVIENT À CALCULER L'AIRE DE LA PARTIE HACHURÉE?
$p(x)$
0,1
9
x
PRESQUE! POUR LE VOLUME, ON DOIT AUSSI MULTIPLIER x PAR L'AIRE DE LA BASE, 20 CM^2.

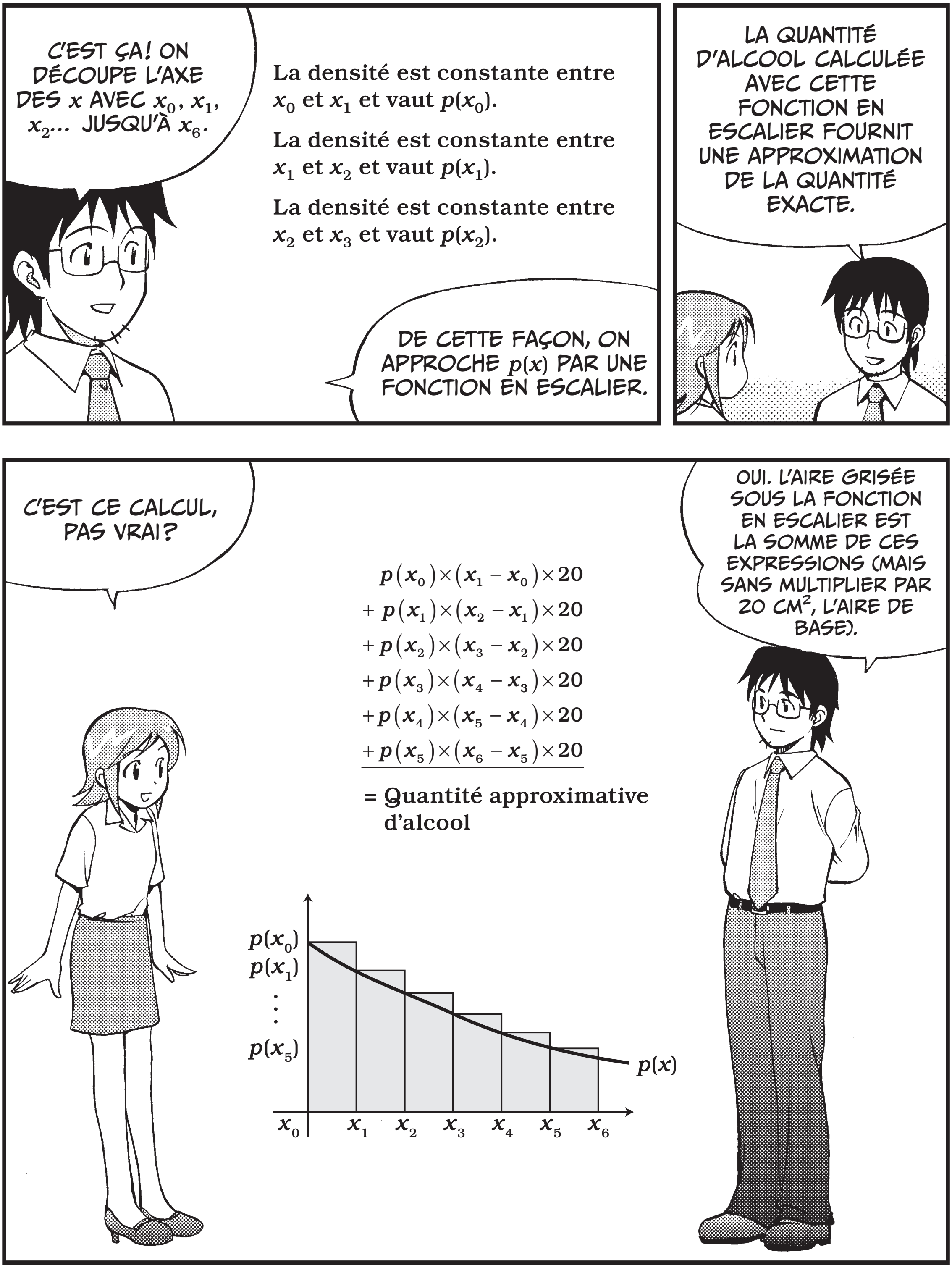

ÉTAPE 2 — SI LA DENSITÉ ÉVOLUE PAR PALIERS
SUPPOSONS MAINTENANT QUE LA DENSITÉ CHANGE PAR PALIERS, CE QUI DONNE UNE COURBE EN ESCALIER...
COMME SUR CE GRAPHIQUE, PAR EXEMPLE.
Densité
$p(x)$
0,3
0,2
0,1
0
2
6
9
x
2
4
3
TU FAIS LE CALCUL, NORIKO?


ALORS, EN CONSIDÉRANT CHAQUE PALIER... L'AIRE DE LA BASE EST 20 CM²...
$\begin{pmatrix}\text{Alcool pour}\\ \text{le palier}\\ 0 \le x \le 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Alcool pour}\\ \text{le palier}\\ 2 < x \le 6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Alcool pour}\\ \text{le palier}\\ 6 < x \le 9\end{pmatrix}$
$= 0{,}3 \times 2 \times 20 + 0{,}2 \times 4 \times 20 + 0{,}1 \times 3 \times 20$
$= (0{,}3 \times 2 + 0{,}2 \times 4 + 0{,}1 \times 3) \times 20$
$= 34$
DONC...

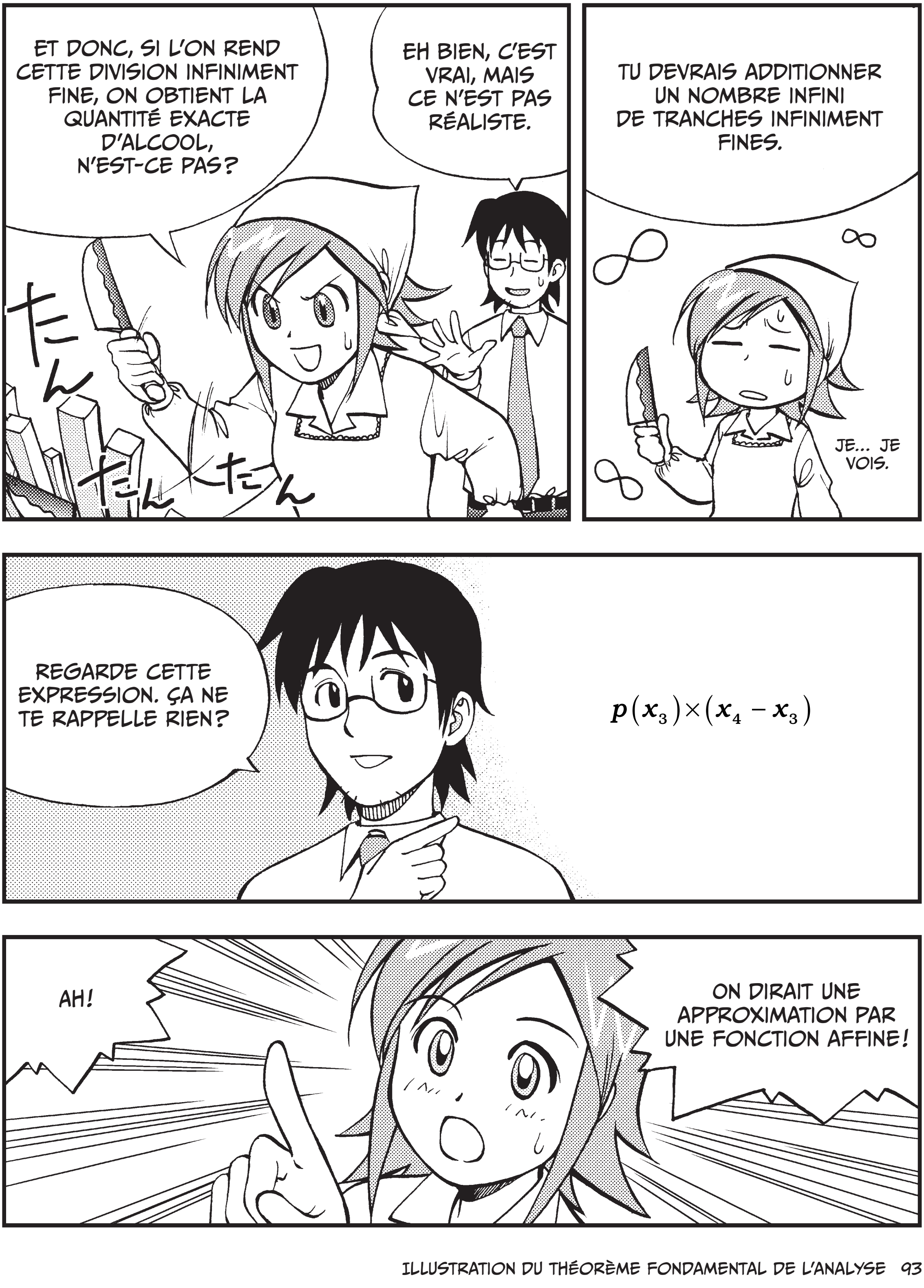

LA RÉPONSE EST 34 GRAMMES, NON?
C'EST EXACT.


ÉTAPE 3 — SI LA DENSITÉ CHANGE DE FAÇON CONTINUE
MAINTENANT, QUE FAIS-TU SI $p(x)$ CHANGE PROGRESSIVEMENT?
Densité $p(x)$
2
0,02
0
9
x
QUELLE PLAIE!!


EN FAIT, C'EST TOUT SIMPLE. REGARDE!
$p(x_0)$
$p(x_1)$
$p(x_2)$
$p(x_5)$
$p(x)$
x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6
JE VOIS. ON PEUT APPROCHER LA FONCTION CONTINUE PAR UNE FONCTION EN ESCALIER PUIS FAIRE COMME À L'ÉTAPE 2.



C'EST ÇA! ON DÉCOUPE L'AXE DES x AVEC x_0, x_1, x_2... JUSQU'À x_6.
La densité est constante entre x_0 et x_1 et vaut $p(x_0)$.
La densité est constante entre x_1 et x_2 et vaut $p(x_1)$.
La densité est constante entre x_2 et x_3 et vaut $p(x_2)$.
DE CETTE FAÇON, ON APPROCHE $p(x)$ PAR UNE FONCTION EN ESCALIER.
LA QUANTITÉ D'ALCOOL CALCULÉE AVEC CETTE FONCTION EN ESCALIER FOURNIT UNE APPROXIMATION DE LA QUANTITÉ EXACTE.
C'EST CE CALCUL, PAS VRAI?
$$\begin{aligned} & p(x_0)\times(x_1-x_0)\times 20 \\ +\ & p(x_1)\times(x_2-x_1)\times 20 \\ +\ & p(x_2)\times(x_3-x_2)\times 20 \\ +\ & p(x_3)\times(x_4-x_3)\times 20 \\ +\ & p(x_4)\times(x_5-x_4)\times 20 \\ +\ & p(x_5)\times(x_6-x_5)\times 20 \end{aligned}$$
= Quantité approximative d'alcool
OUI. L'AIRE GRISÉE SOUS LA FONCTION EN ESCALIER EST LA SOMME DE CES EXPRESSIONS (MAIS SANS MULTIPLIER PAR 20 CM^2, L'AIRE DE BASE).
$p(x_0)$
$p(x_1)$
$p(x_5)$
$p(x)$
x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6


ET DONC, SI L'ON REND CETTE DIVISION INFINIMENT FINE, ON OBTIENT LA QUANTITÉ EXACTE D'ALCOOL, N'EST-CE PAS?
EH BIEN, C'EST VRAI, MAIS CE N'EST PAS RÉALISTE.
たん
たん
たん
TU DEVRAIS ADDITIONNER UN NOMBRE INFINI DE TRANCHES INFINIMENT FINES.
∞
∞
∞
JE... JE VOIS.
REGARDE CETTE EXPRESSION. ÇA NE TE RAPPELLE RIEN?
$p(x_3)\times(x_4 - x_3)$
AH!
ON DIRAIT UNE APPROXIMATION PAR UNE FONCTION AFFINE!

ÉTAPE 4 — APPROXIMATION PAR UNE FONCTION AFFINE

En notant $f'(x)$ la dérivée de $f(x)$, on a $f(x) \approx f'(a)\,(x - a) + f(a)$ près de $x = a$.
En soustrayant $f(a)$ des deux côtés, on obtient

❶ $f(x) - f(a) \approx f'(a)(x - a)$

soit (Variation de f) ≈ (Dérivée de f) × (Variation de x)

L'expression ci-dessus n'est valable que si x est proche de a. On suppose désormais que l'intervalle entre les valeurs x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_6 est petit : x_1 est proche de x_0, x_2 est proche de x_1, et ainsi de suite.
À présent, introduisons une nouvelle fonction, $q(x)$, dont la dérivée est $p(x)$. Ceci s'écrit $q'(x) = p(x)$.
Utilisons ❶ pour cette fonction $q(x)$:

(Variation de q) ≈ (Dérivée de q) × (Variation de x)

$$q(x_1) - q(x_0) \approx p(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$q(x_2) - q(x_1) \approx p(x_1)(x_2 - x_1)$$

La somme des termes de droite de ces expressions est approximativement égale à la somme des termes de gauche.
Or certains termes se compensent :

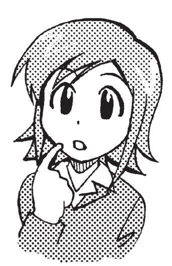
$$\begin{array}{rl}
 & \cancel{q(x_1)} - q(x_0) \approx p(x_0)(x_1 - x_0) \\
 & \cancel{q(x_2)} - \cancel{q(x_1)} \approx p(x_1)(x_2 - x_1) \\
 & \cancel{q(x_3)} - \cancel{q(x_2)} \approx p(x_2)(x_3 - x_2) \\
 & \cancel{q(x_4)} - \cancel{q(x_3)} \approx p(x_3)(x_4 - x_3) \\
 & \cancel{q(x_5)} - \cancel{q(x_4)} \approx p(x_4)(x_5 - x_4) \\
+ & q(x_6) - \cancel{q(x_5)} \approx p(x_5)(x_6 - x_5) \\
\hline
 & q(x_6) - q(x_0) \approx \text{« la somme »}
\end{array}$$

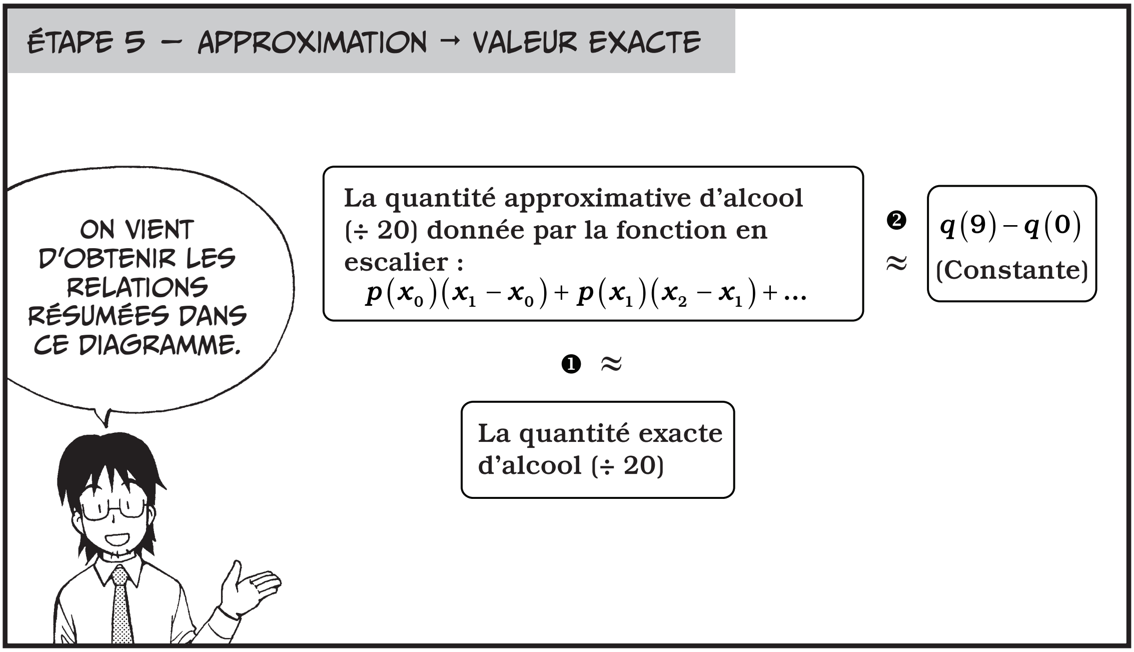
Compte tenu des dimensions du verre, $x_0 = 0$ et $x_6 = 9$, donc

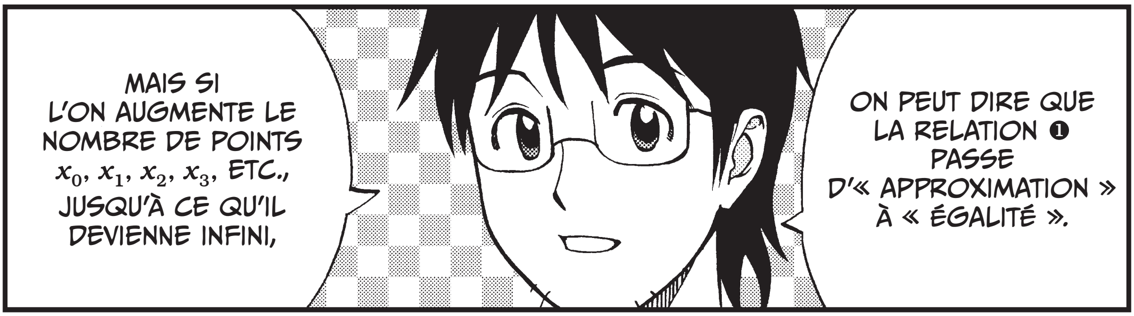
La quantité approximative d'alcool = « la somme » × 20

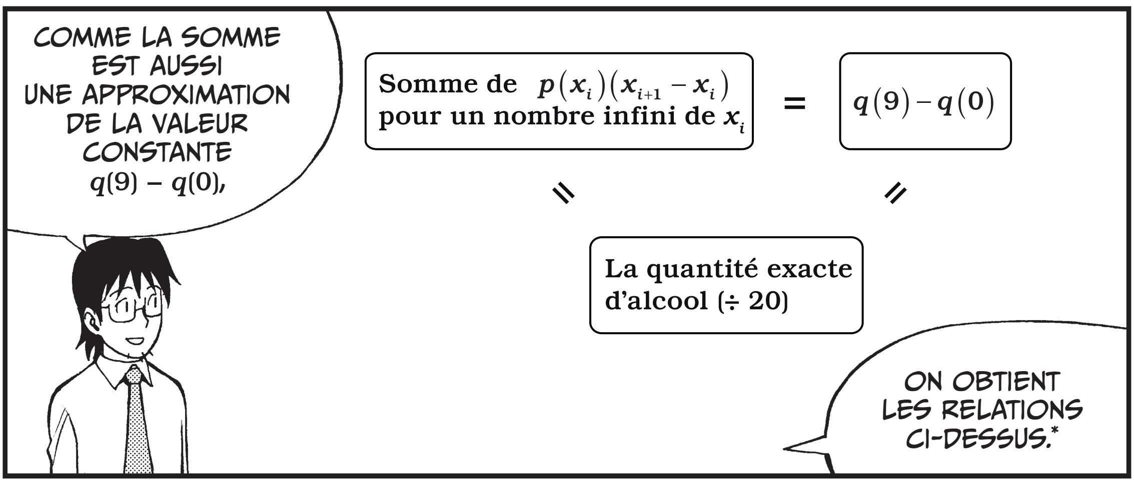
$$= [q(x_6) - q(x_0)] \times 20$$

$$= [q(9) - q(0)] \times 20$$



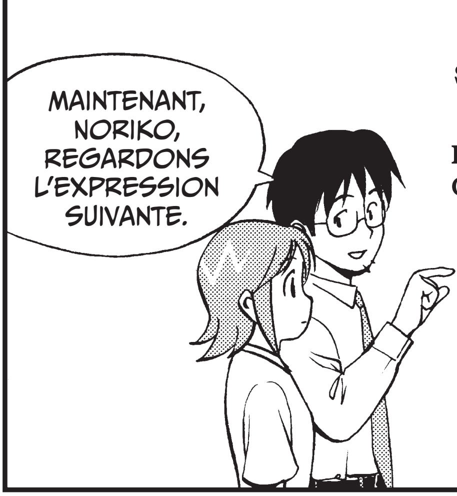






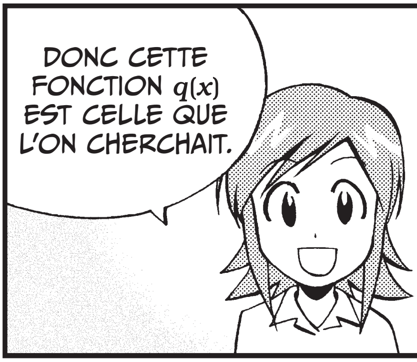
* UNE PREUVE PLUS RIGOUREUSE SERA DONNÉE PAGE 100.

ÉTAPE 6 — $p(x)$ EST LA DÉRIVÉE DE $q(x)$



Si $q(x) = -\frac{2}{x+1}$, alors $q'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} = p(x)$

En d'autres termes, $p(x)$ est la dérivée de $q(x)$. On dit que $q(x)$ est une *primitive* de $p(x)$.

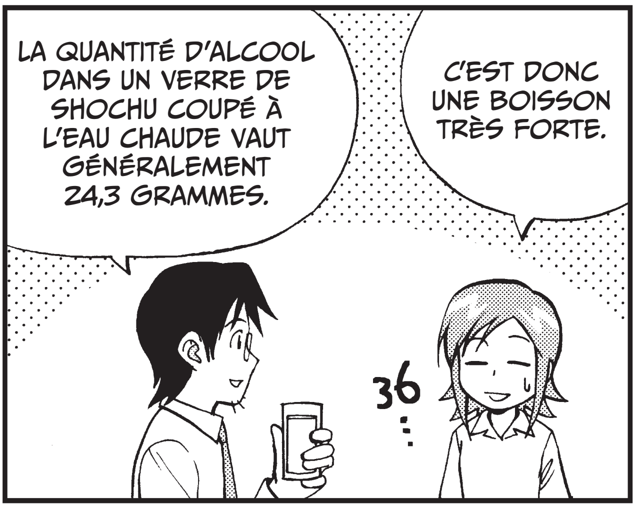


La quantité d'alcool

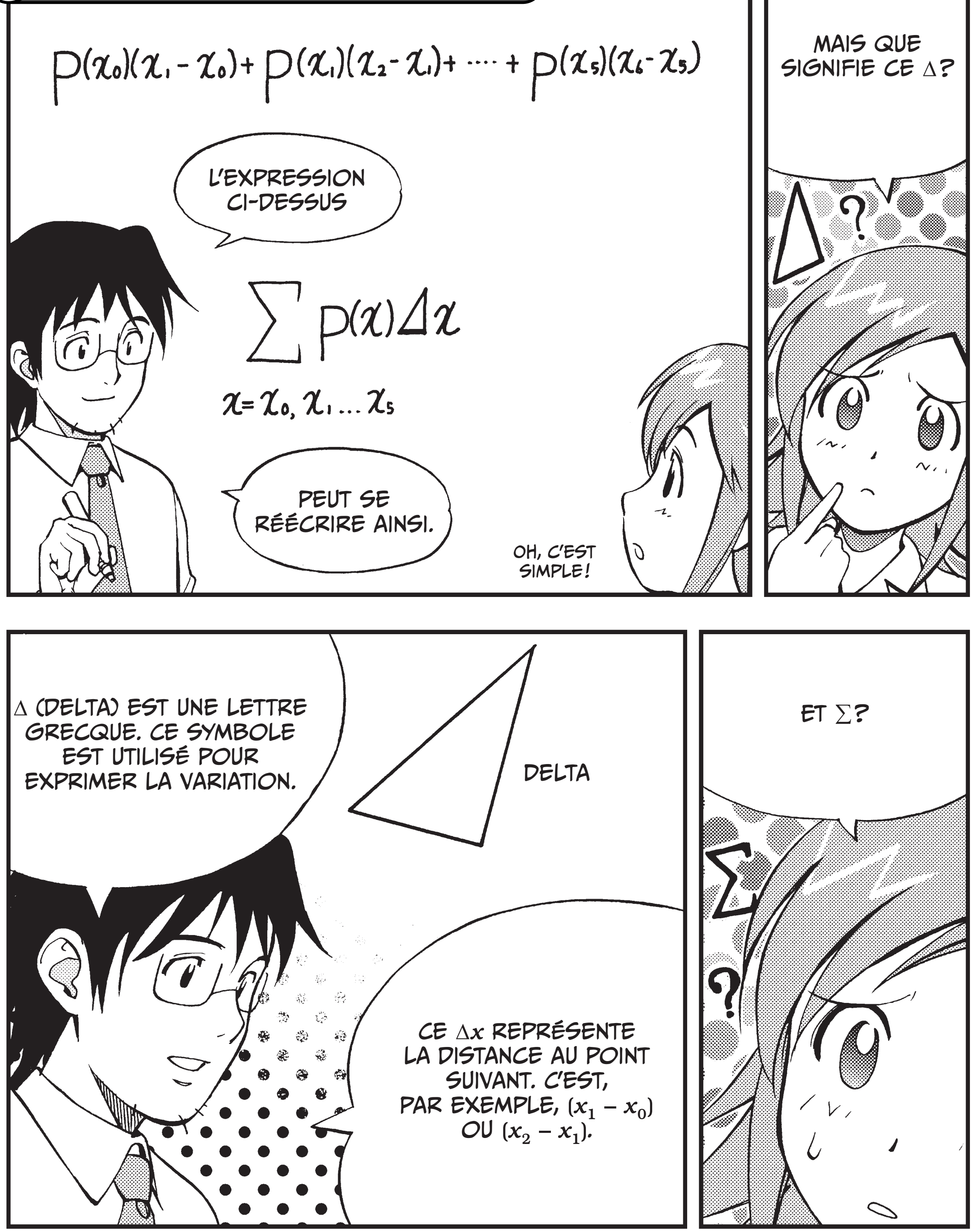
$$= [q(9) - q(0)] \times 20$$

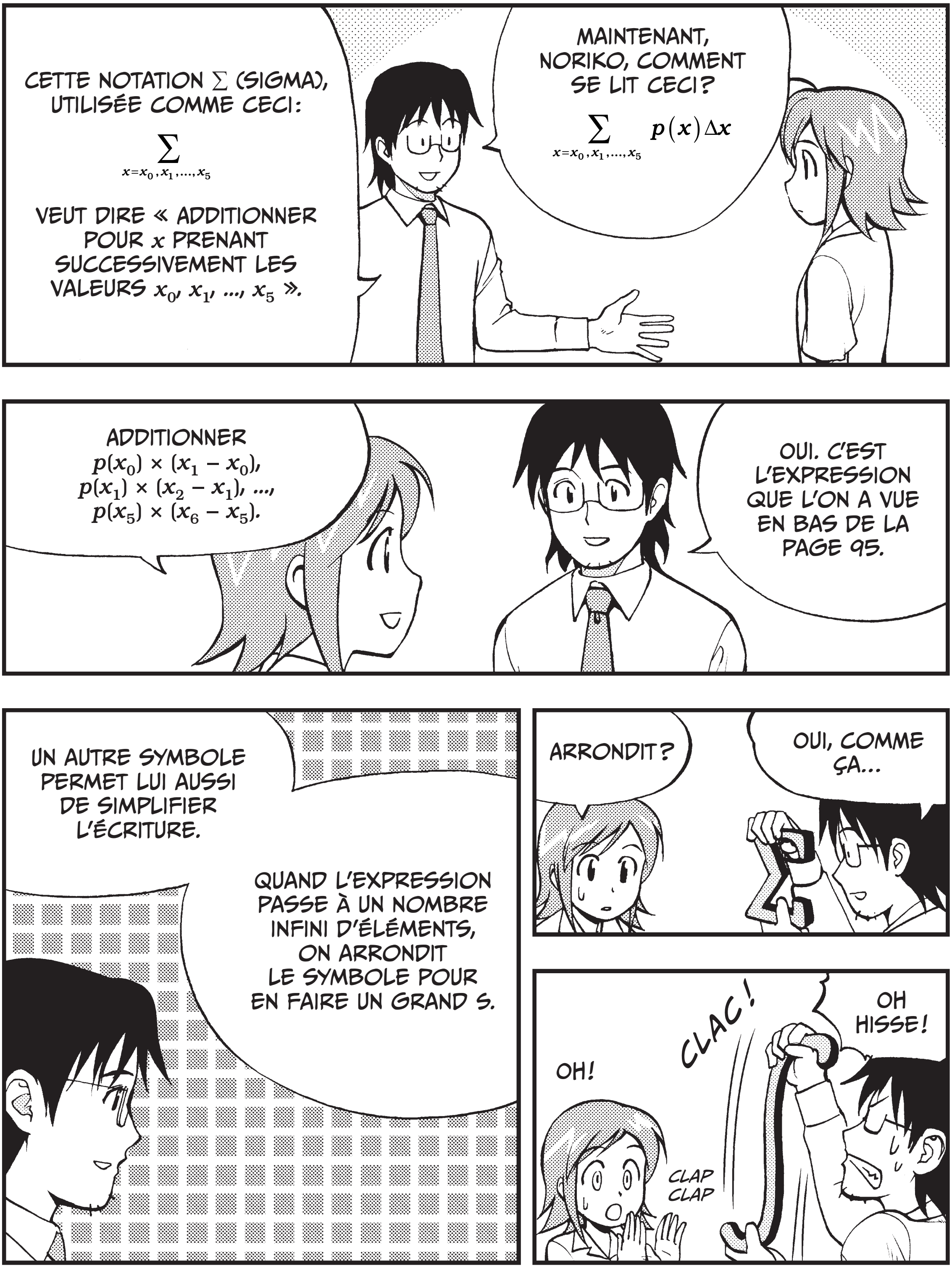
$$= \left[-\frac{2}{9+1} - \left(-\frac{2}{0+1}\right)\right] \times 20$$

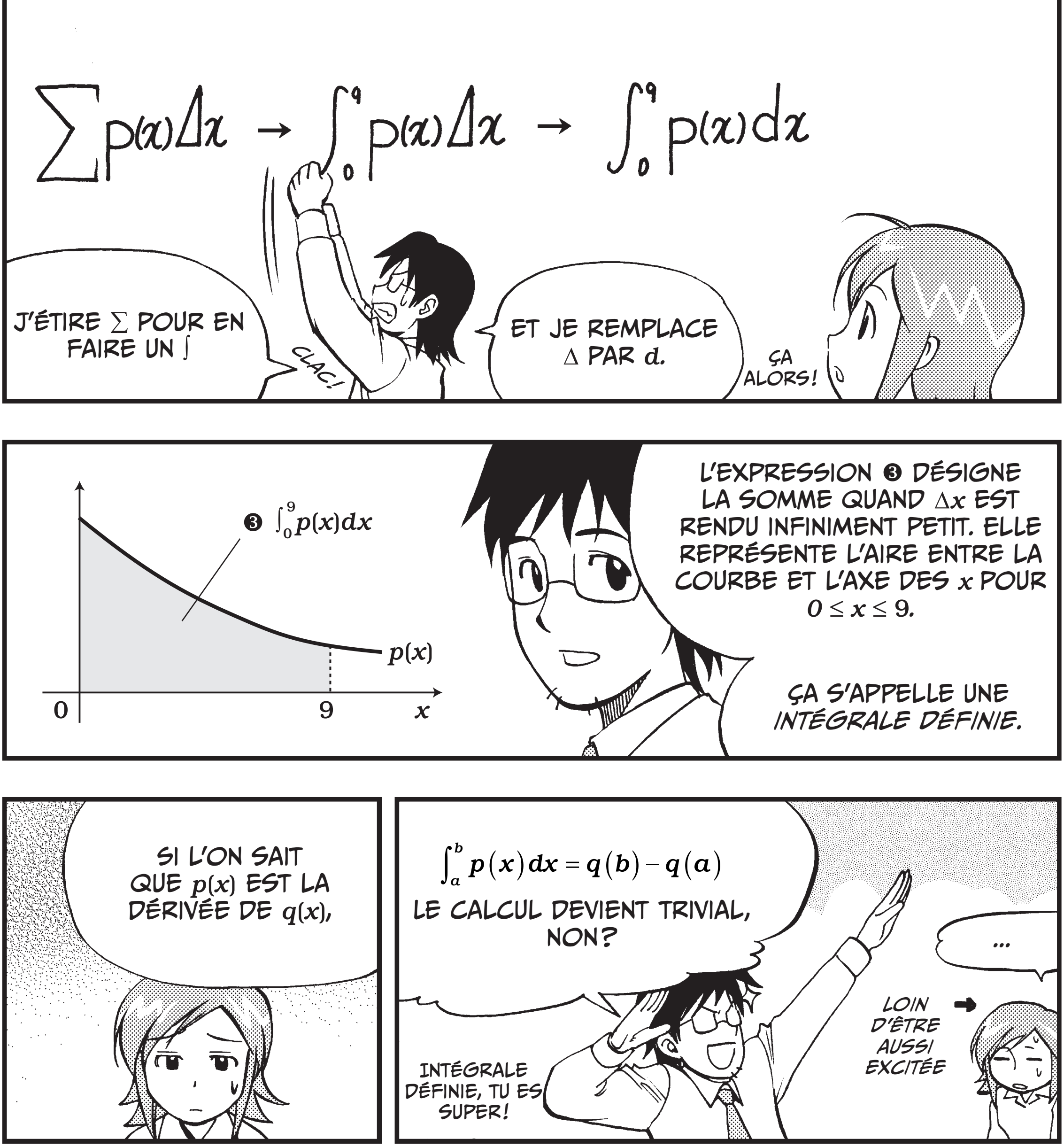
$$= 36 \text{ grammes}$$



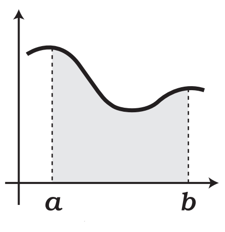
2 Le théorème fondamental de l'analyse




CETTE NOTATION $\sum$ (SIGMA), UTILISÉE COMME CECI: $\sum_{x=x_0, x_1, \ldots, x_5}$ VEUT DIRE « ADDITIONNER POUR x PRENANT SUCCESSIVEMENT LES VALEURS x_0, x_1, ..., x_5 ».
MAINTENANT, NORIKO, COMMENT SE LIT CECI? $\sum_{x=x_0, x_1, \ldots, x_5} p(x)\Delta x$
ADDITIONNER $p(x_0) \times (x_1 - x_0)$, $p(x_1) \times (x_2 - x_1)$, ..., $p(x_5) \times (x_6 - x_5)$.
OUI. C'EST L'EXPRESSION QUE L'ON A VUE EN BAS DE LA PAGE 95.
UN AUTRE SYMBOLE PERMET LUI AUSSI DE SIMPLIFIER L'ÉCRITURE.
QUAND L'EXPRESSION PASSE À UN NOMBRE INFINI D'ÉLÉMENTS, ON ARRONDIT LE SYMBOLE POUR EN FAIRE UN GRAND S.
ARRONDIT?
OUI, COMME ÇA...
OH!
CLAC!
OH HISSE!
CLAP CLAP



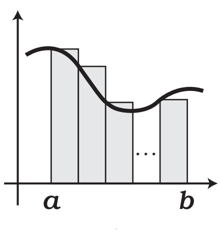
BILAN



$$\int_a^b p(x)dx \approx \sum_{x=x_0, x_1, \ldots, x_n} p(x)\Delta x$$

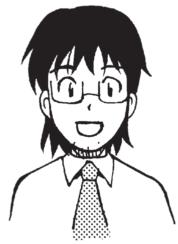
Si on trouve $q(x)$ qui satisfait $q'(x) = p(x)$,

$$\int_a^b p(x)\,dx = q(b) - q(a)$$



C'EST LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE!

UNE JUSTIFICATION PRÉCISE DE L'ÉTAPE 5



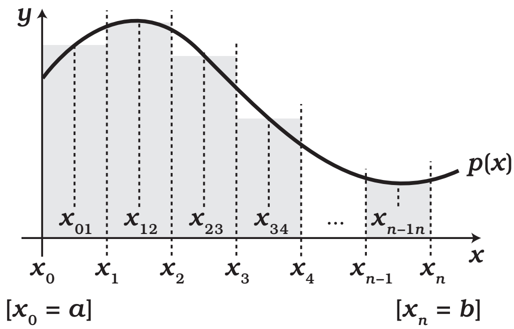
Dans l'explication donnée précédemment (page 95), on a écrit $q(x_1) - q(x_0) \approx p(x_0)(x_1 - x_0)$, une identité « grossière » qui s'approche à peu près de l'expression exacte. Pour ceux qui pensent que c'est du travail bâclé, voici une explication plus soignée grâce au théorème des accroissements finis.

Supposons que l'on connaisse $q(x)$ vérifiant $q'(x) = p(x)$.

Plaçons des points x_0 (= a), x_1, x_2, x_3, ..., x_n (= b) sur l'axe des x.

On repère ensuite un point x_{01} entre x_0 et x_1 vérifiant $q(x_1) - q(x_0) = q'(x_{01})(x_1 - x_0)$.

L'existence de x_{01} est garantie par le théorème des accroissements finis. De même, on trouve x_{12} entre x_1 et x_2 et on obtient $q(x_2) - q(x_1) = q'(x_{12})(x_2 - x_1)$.



Aires de ces morceaux

En répétant cette opération, il vient

$$
\begin{array}{rcll}
q(x_1) - q(x_0) = & q'(x_{01})(x_1 - x_0) & = p(x_{01})(x_1 - x_0) & \\
q(x_2) - q(x_1) = & q'(x_{12})(x_2 - x_1) & = p(x_{12})(x_2 - x_1) & \\
q(x_3) - q(x_2) = & q'(x_{23})(x_3 - x_2) & = p(x_{23})(x_3 - x_2) & \text{On additionne} \\
\dots & \dots & \dots & \\
+\ q(x_n) - q(x_{n-1}) = & q'(x_{n-1n})(x_n - x_{n-1}) & = p(x_{n-1n})(x_n - x_{n-1}) & \\
\hline
q(x_n) - q(x_0) & \longleftarrow \boxed{\text{Toujours égal}} \longrightarrow & \text{Aire approchée} & \\
\downarrow & & \downarrow \text{ Sections infiniment fines} & \\
q(b) - q(a) & \longleftarrow \boxed{\text{Égal}} \longrightarrow & \text{Aire exacte} &
\end{array}
$$

Ceci correspond au diagramme de l'étape 5.

3 Formules d'intégration

FORMULE 3-1: LES FORMULES D'INTÉGRATION

❶ $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

On peut joindre les intervalles contigus des intégrales définies d'une même fonction (relation de Chasles).

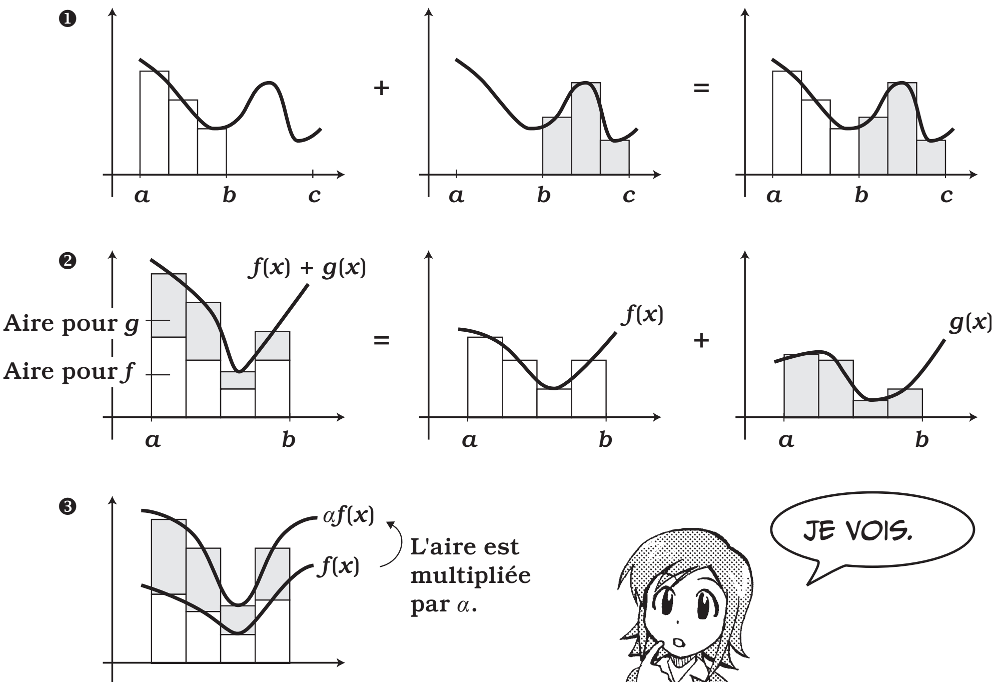
❷ $$\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

L'intégrale définie d'une somme est la somme des intégrales définies.

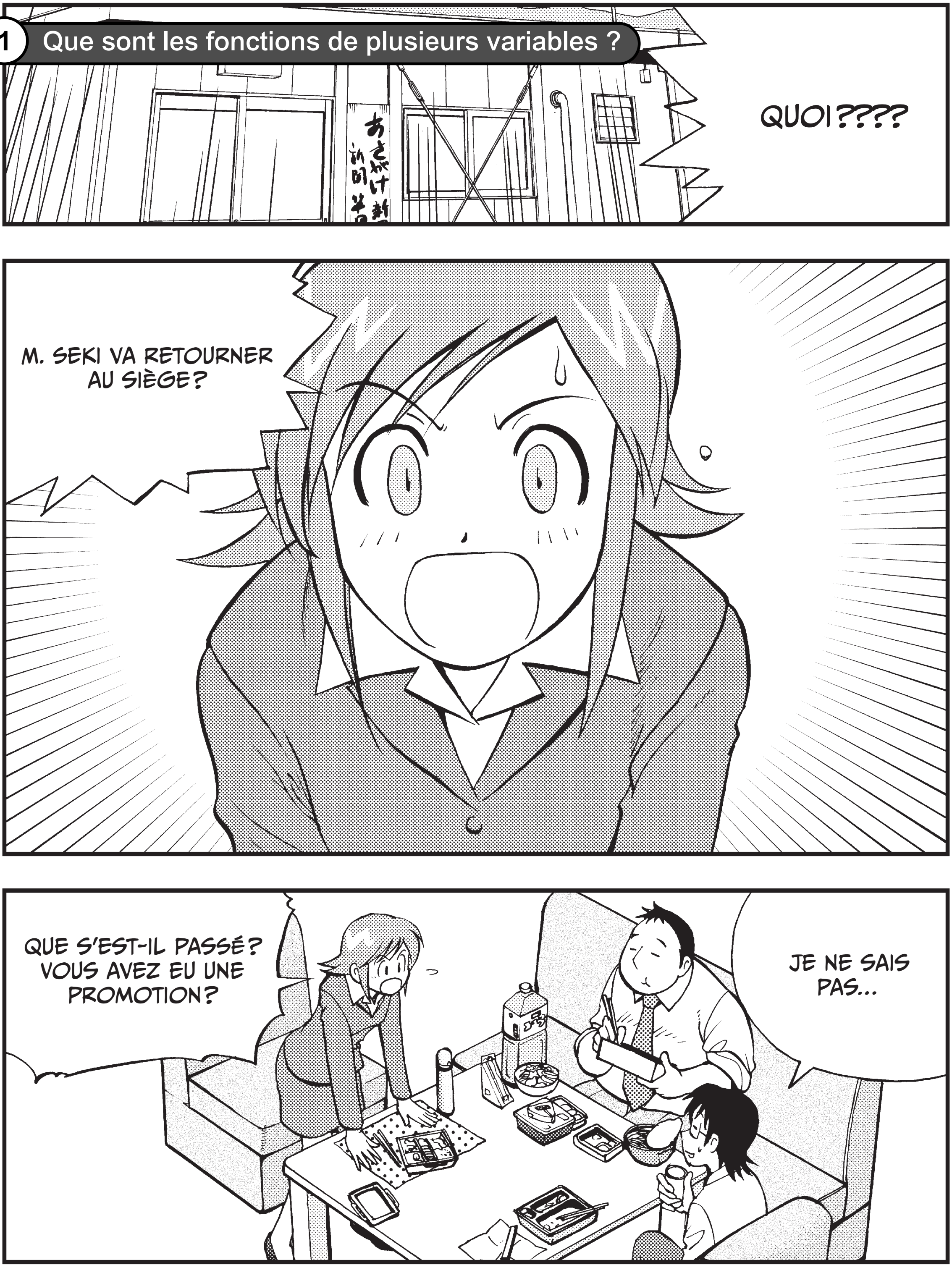
❸ $$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx$$

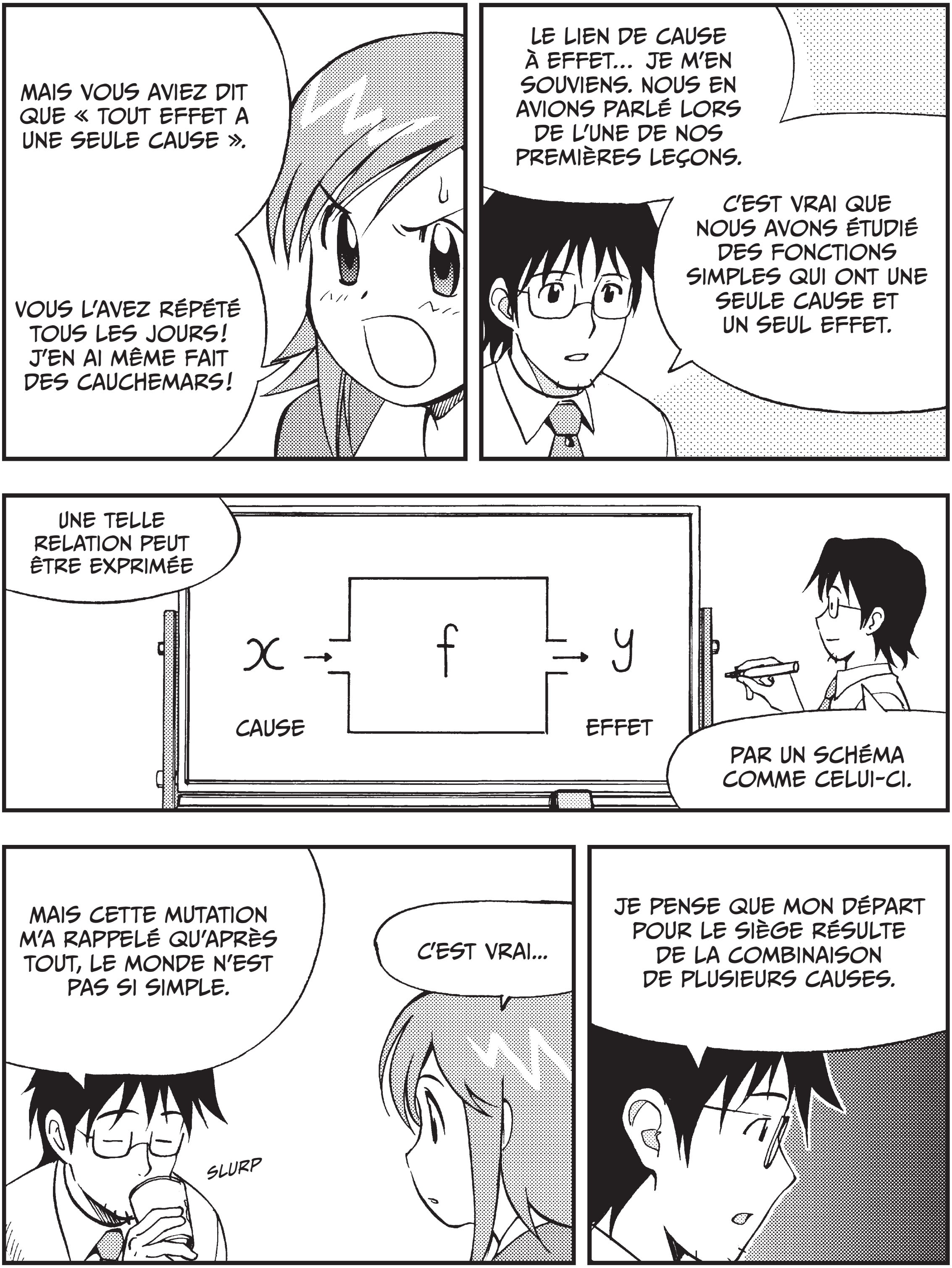
Une constante multiplicative à l'intérieur d'une intégrale définie peut être sortie de l'intégrale (transparence aux scalaires).

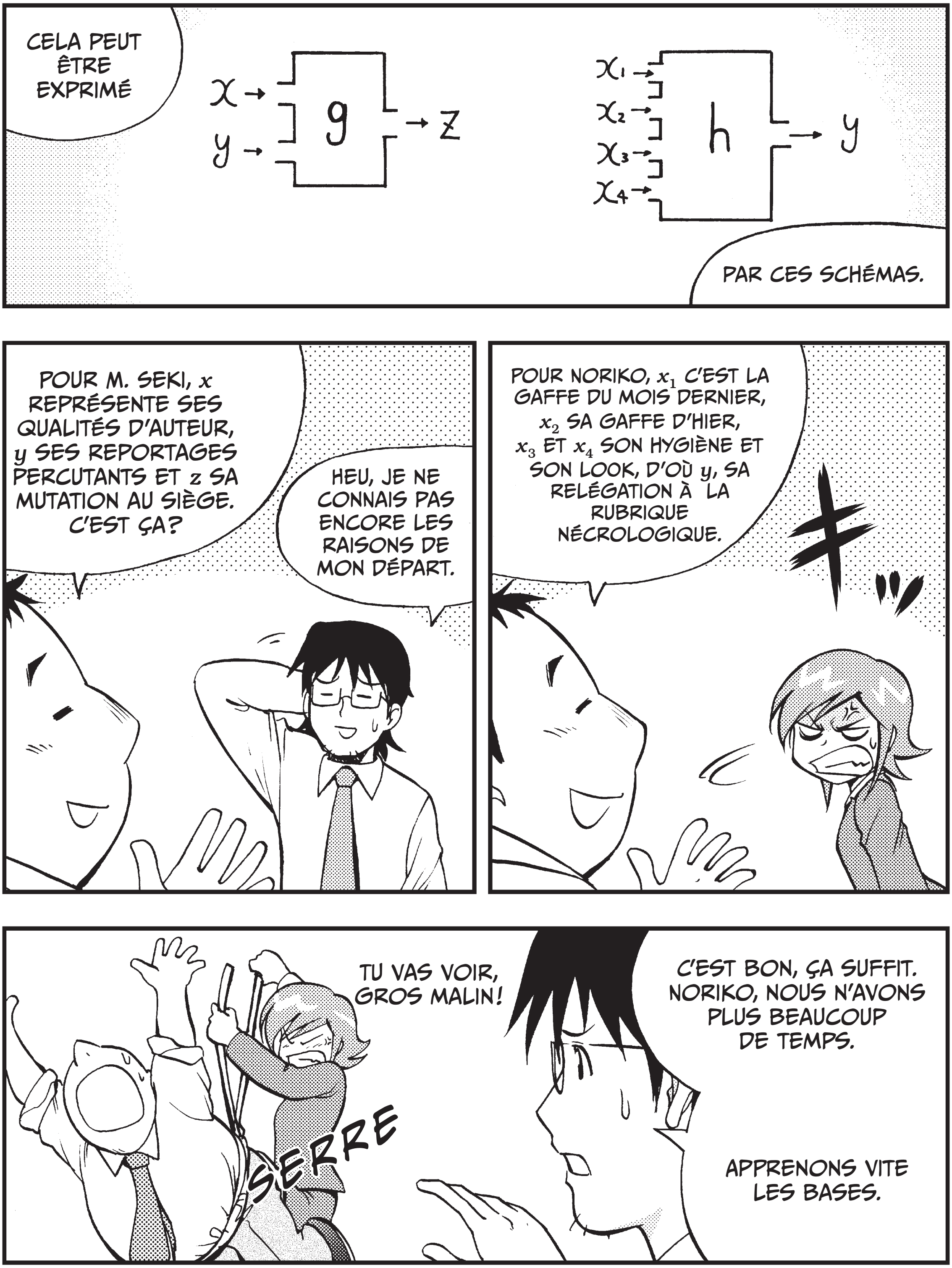
Les formules ❶ à ❸ sont intuitives si on fait un dessin.

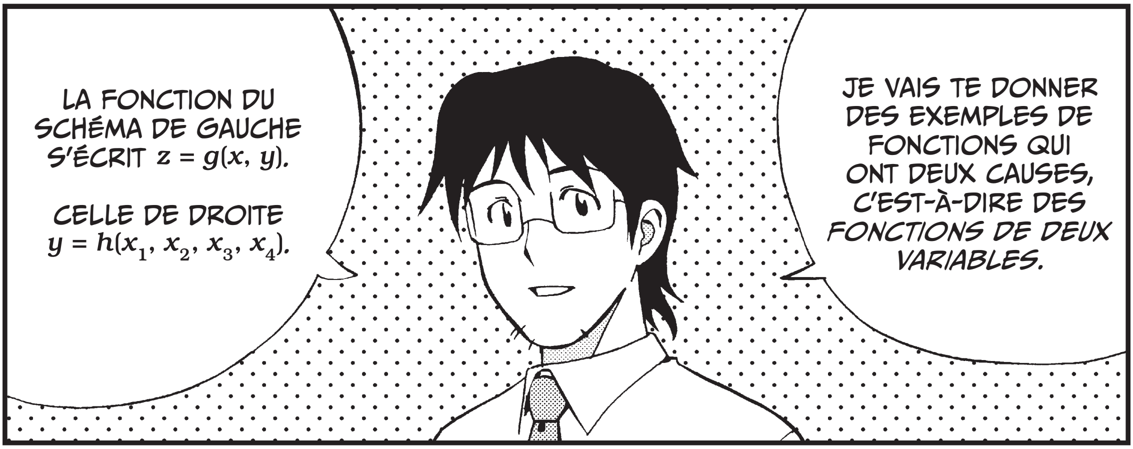


1 Que sont les fonctions de plusieurs variables ?




MAIS VOUS AVIEZ DIT QUE « TOUT EFFET A UNE SEULE CAUSE ».
VOUS L'AVEZ RÉPÉTÉ TOUS LES JOURS! J'EN AI MÊME FAIT DES CAUCHEMARS!
LE LIEN DE CAUSE À EFFET... JE M'EN SOUVIENS. NOUS EN AVIONS PARLÉ LORS DE L'UNE DE NOS PREMIÈRES LEÇONS.
C'EST VRAI QUE NOUS AVONS ÉTUDIÉ DES FONCTIONS SIMPLES QUI ONT UNE SEULE CAUSE ET UN SEUL EFFET.
UNE TELLE RELATION PEUT ÊTRE EXPRIMÉE
x
f
y
CAUSE
EFFET
PAR UN SCHÉMA COMME CELUI-CI.
MAIS CETTE MUTATION M'A RAPPELÉ QU'APRÈS TOUT, LE MONDE N'EST PAS SI SIMPLE.
SLURP
C'EST VRAI...
JE PENSE QUE MON DÉPART POUR LE SIÈGE RÉSULTE DE LA COMBINAISON DE PLUSIEURS CAUSES.


CELA PEUT ÊTRE EXPRIMÉ
x → g → z
y →
x_1 →
x_2 →
x_3 →
x_4 →
h → y
PAR CES SCHÉMAS.
POUR M. SEKI, x REPRÉSENTE SES QUALITÉS D'AUTEUR, y SES REPORTAGES PERCUTANTS ET z SA MUTATION AU SIÈGE. C'EST ÇA?
HEU, JE NE CONNAIS PAS ENCORE LES RAISONS DE MON DÉPART.
POUR NORIKO, x_1 C'EST LA GAFFE DU MOIS DERNIER, x_2 SA GAFFE D'HIER, x_3 ET x_4 SON HYGIÈNE ET SON LOOK, D'OÙ y, SA RELÉGATION À LA RUBRIQUE NÉCROLOGIQUE.
C'EST BON, ÇA SUFFIT. NORIKO, NOUS N'AVONS PLUS BEAUCOUP DE TEMPS.
TU VAS VOIR, GROS MALIN!
SERRE
APPRENONS VITE LES BASES.



EXEMPLE 1

Un objet est lancé en l'air depuis le sol avec une vitesse v. Après t secondes, son altitude $h(v, t)$ est donnée par

$$h(v,t) = vt - 4{,}9t^2$$

EXEMPLE 2

Le pourcentage $f(x, y)$ de sucre dans un sirop obtenu en dissolvant y grammes de sucre dans x grammes d'eau est donné par

$$f(x,y) = \frac{y}{x+y} \times 100$$

EXEMPLE 3

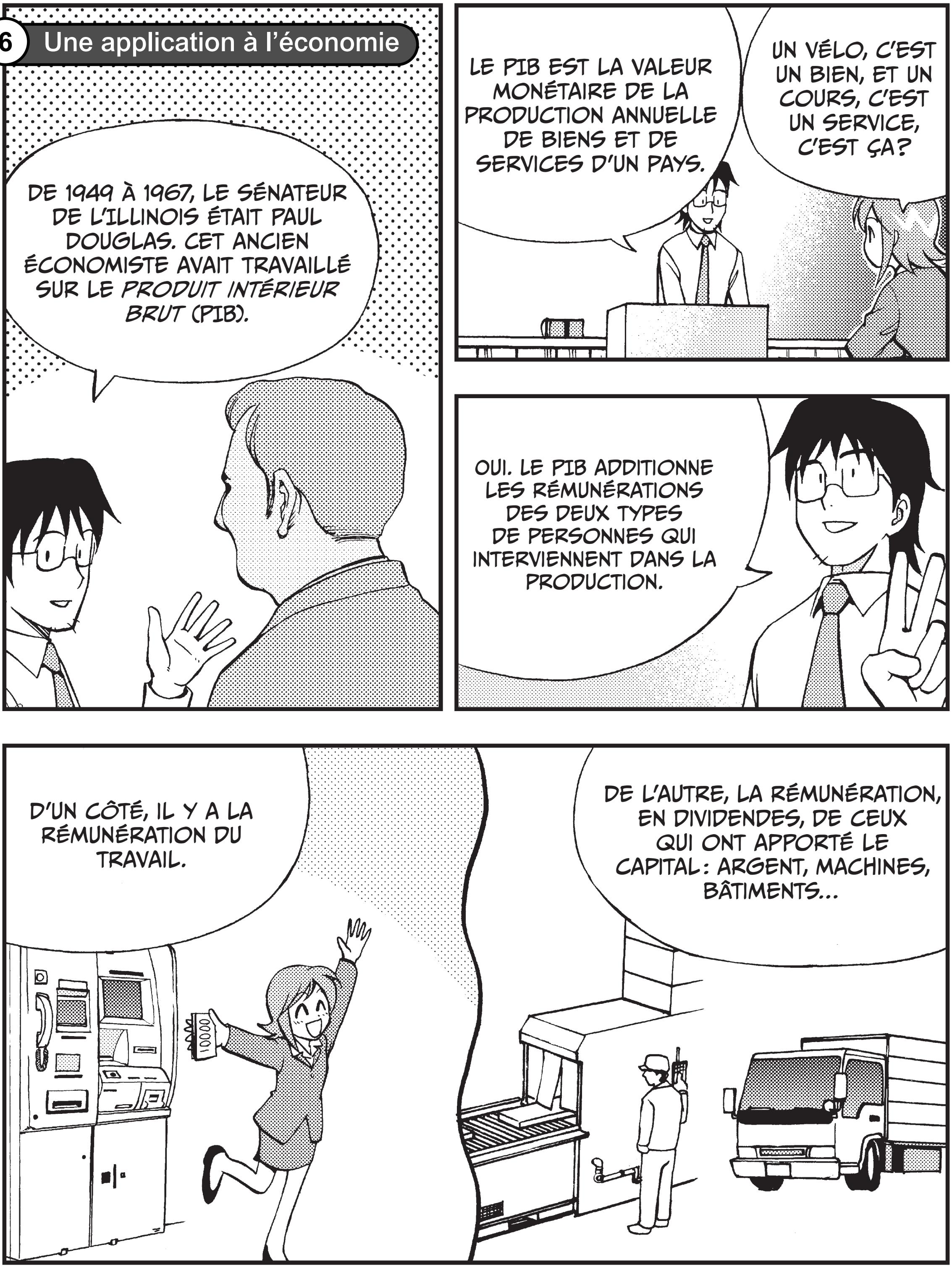
Notons K la valeur des équipements et des machines (appelée *capital*) d'un pays et L la valeur du travail (« *Labour* » en anglais). On modélise la production totale de biens (PIB : Produit Intérieur Brut) par une fonction $P(L, K)$.

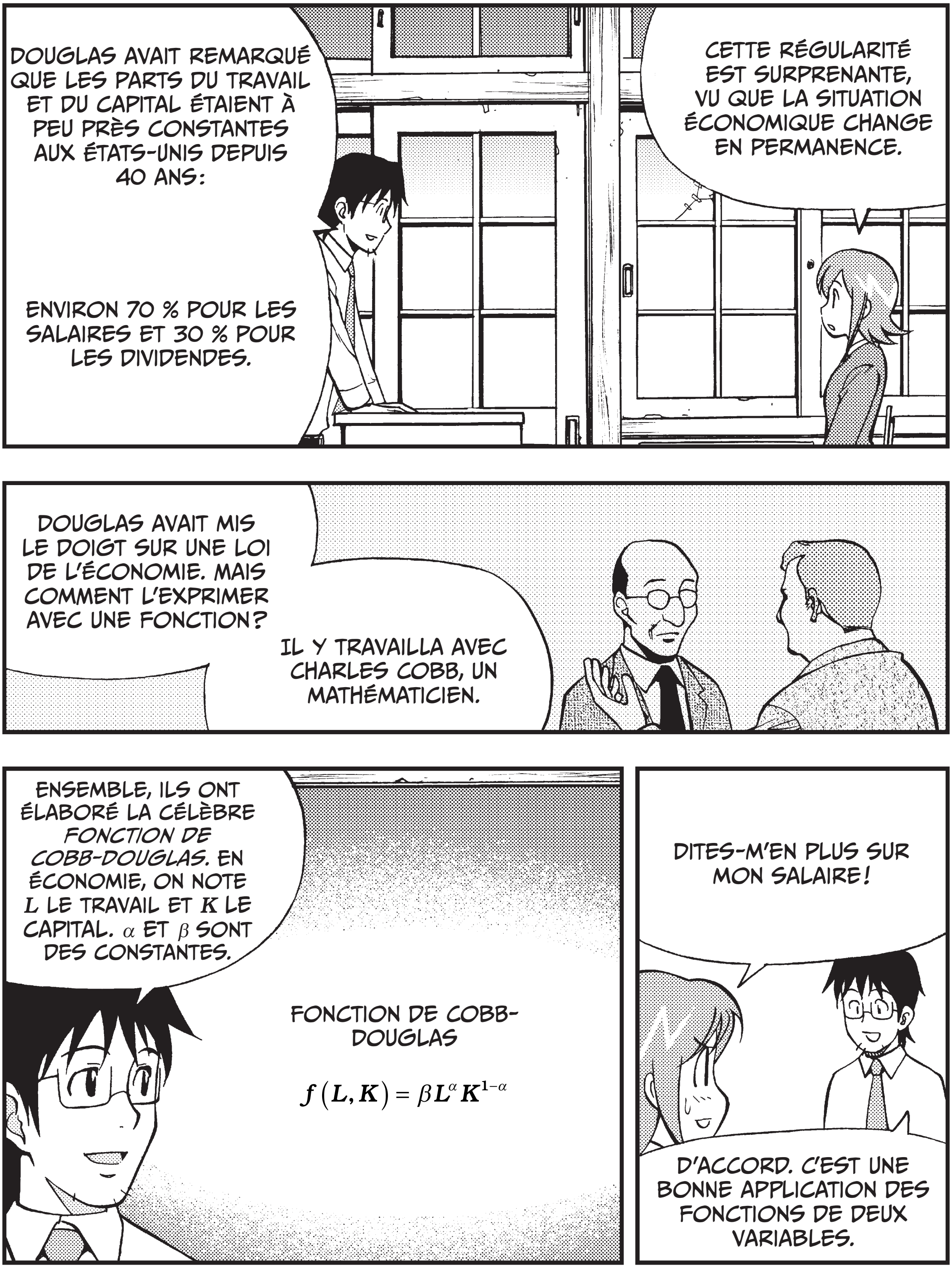
EXEMPLE 4

La température T d'un gaz parfait est une fonction de sa pression P et de son volume V, ce que l'on note $T(P, V)$. Elle est donnée par

$$T(P,V) = \gamma PV$$

6 Une application à l'économie




DOUGLAS AVAIT REMARQUÉ QUE LES PARTS DU TRAVAIL ET DU CAPITAL ÉTAIENT À PEU PRÈS CONSTANTES AUX ÉTATS-UNIS DEPUIS 40 ANS :
ENVIRON 70 % POUR LES SALAIRES ET 30 % POUR LES DIVIDENDES.
CETTE RÉGULARITÉ EST SURPRENANTE, VU QUE LA SITUATION ÉCONOMIQUE CHANGE EN PERMANENCE.
DOUGLAS AVAIT MIS LE DOIGT SUR UNE LOI DE L'ÉCONOMIE. MAIS COMMENT L'EXPRIMER AVEC UNE FONCTION ?
IL Y TRAVAILLA AVEC CHARLES COBB, UN MATHÉMATICIEN.
ENSEMBLE, ILS ONT ÉLABORÉ LA CÉLÈBRE *FONCTION DE COBB-DOUGLAS*. EN ÉCONOMIE, ON NOTE L LE TRAVAIL ET K LE CAPITAL. α ET β SONT DES CONSTANTES.
FONCTION DE COBB-DOUGLAS
$f(L, K) = \beta L^{\alpha} K^{1-\alpha}$
DITES-M'EN PLUS SUR MON SALAIRE !
D'ACCORD. C'EST UNE BONNE APPLICATION DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES.

SOLUTIONS DE TOUS LES EXERCICES

PROLOGUE

1. Si $y = \frac{5}{9}(x - 32)$ alors $z = 7y - 30 = \frac{35}{9}(x - 32) - 30$.

CHAPITRE 1

1. A. $f(5) = g(5) = 50$ B. $f'(5) = 8$

2. $$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(a+\varepsilon)^3 - a^3}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3a^2\varepsilon + 3a\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(3a^2 + 3a\varepsilon + \varepsilon^2\right) = 3a^2$$

La dérivée de $f(x) = x^3$ est donc $f'(x) = 3x^2$.

CHAPITRE 2

1. $$f'(x) = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

2. $$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$$

x		-2		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+

f atteint donc en $x = -2$ un maximum qui vaut $f(-2) = 16$, et en $x = 2$ un minimum qui vaut $f(2) = -16$.

3. Comme $f(x) = (1 - x)^3$ peut s'écrire $g(h(x))$, fonction composée de $g(x) = x^3$ et de $h(x) = 1 - x$,

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = 3(1-x)^2(-1) = -3(1-x)^2$$

4. $$g'(x) = (x^2)'(1-x)^3 + x^2\left((1-x)^3\right)' = 2x(1-x)^3 + x^2\left(-3(1-x)^2\right)$$
$$= x(1-x)^2\left(2(1-x) - 3x\right) \qquad = x(1-x)^2(2-5x)$$

$g'(x) = 0$ si $x = \frac{2}{5}$ ou $x = 1$, et $g(1) = 0$.

g atteint son maximum $g\left(\dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{108}{3125}$ en $x = \dfrac{2}{5}$.

CHAPITRE 3

1. ❶ $\int_1^3 3x^2\ dx = \left[x^3\right]_1^3 = 3^3 - 1^3 = 26$

❷ $$\int_2^4 \frac{x^3+1}{x^2}\ dx = \int_2^4 \left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_2^4 x\ dx + \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^4 + \left[-\frac{1}{x}\right]_2^4$$
$$= \frac{1}{2}\left(4^2 - 2^2\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{4}\right) = \frac{25}{4}$$

❸ $$\int_0^5 x + \left(1+x^2\right)^7 dx + \int_0^5 x - \left(1+x^2\right)^7 dx = \int_0^5 2x\ dx = 5^2 - 0^2 = 25$$

2. A. L'aire algébrique (positive ou négative) entre la courbe et l'axe des x est $\int_0^3 \left(x^2 - 3x\right) dx$. Comme $x(x-3)$ est négatif entre 0 et 3, l'aire géométrique est $-\int_0^3 \left(x^2 - 3x\right) dx$.

B. $$-\int_0^3 \left(x^2 - 3x\right) dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\left(3^3 - 0^3\right) + \frac{3}{2}\left(3^2 - 0^2\right) = \frac{9}{2}$$

CHAPITRE 4

1. $$\left(\tan x\right)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\left(\sin x\right)' \cos x - \sin x \left(\cos x\right)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2. Comme $\left(\tan x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ on a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1.$

3. Puisque $f'(x) = (x)' e^x + x\left(e^x\right)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$,

le minimum est $f(-1) = -\dfrac{1}{e}$.

4. Posons $f(x) = x^2$ et $g(x) = \ln x$ et intégrons par parties.

$$\int_1^e \left(x^2\right)' \ln x\ dx + \int_1^e x^2 \left(\ln x\right)' dx = e^2 \ln e - \ln 1 = e^2$$

Ainsi, $\displaystyle\int_1^e 2x \ln x\ dx + \int_1^e x^2 \frac{1}{x}\ dx = e^2$ d'où

$$\int_1^e 2x \ln x\ dx = -\int_1^e x\ dx + e^2 = -\frac{1}{2}\left(e^2 - 1^2\right) + e^2 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}$$

CHAPITRE 5

1. Pour $f(x) = e^{-x}$, $f'(x) = -e^{-x}$, $f''(x) = e^{-x}$ et $f'''(x) = -e^{-x}$

   donc $f(0) = 1,\quad f'(0) = -1,\quad f''(0) = 1,\qquad f'''(0) = -1$

   d'où $f(x) = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots$

2. $f(x) = (\cos x)^{-1}$

   $f'(x) = (\cos x)^{-2} \sin x$

   $f''(x) = 2(\cos x)^{-3}(\sin x)^2 + (\cos x)^{-2}\cos x = 2(\cos x)^{-3}(\sin x)^2 + (\cos x)^{-1}$

   d'où $f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = 1$ puis $f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x^2$.

3. Page 159, on a calculé les dérivées successives de $f(x)$ et constaté qu'en les évaluant en 0 il ne restait qu'un seul terme. En remplaçant x par $(x - a)$, on voit qu'évaluer les dérivées de $f(x - a)$ en $x = a$ ne laisse aussi qu'un seul terme. Dès lors, les coefficients a_n de la page 159 deviennent les coefficients $c_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$, comme indiqué page 163.

CHAPITRE 6

1. Pour $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$, $f_x(x, y) = 2x + 2y$ et $f_y(x, y) = 2x + 6y$.

2. La différentielle de $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi g^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$ est

   $$dT = \frac{\partial T}{\partial g}dg + \frac{\partial T}{\partial L}dL = -\pi g^{-\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{2}}dg + \pi g^{-\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}dL$$

   Par conséquent, $\Delta T \approx -\pi g^{-\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{2}}\Delta g + \pi g^{-\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}\Delta L$. Si $\Delta g = -0{,}02\ g$ et $\Delta L = 0{,}01\ L$,

   $$\Delta T \approx 0{,}02\pi g^{-\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{2}}g + 0{,}01\pi g^{-\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}L = 0{,}03\pi g^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} = 0{,}03\frac{T}{2} = 0{,}015T$$

   donc T augmente de 1,5 %.

3. Puisque $f(x,y) = c$ est constante, $\frac{df}{dx} = 0$.

   Or, d'après la règle de la chaîne (page 211) appliquée à $f(x, h(x))$,

   $$\frac{df}{dx} = f_x\frac{dx}{dx} + f_y\frac{dh}{dx} = f_x + f_y\,h'(x) \qquad \text{donc} \qquad h'(x) = -\frac{f_x}{f_y}\ .$$

Formules, fonctions et théorèmes principaux du livre

Équations affines (fonctions affines)

L'équation de la droite de pente m qui passe par le point (a, b) est:

$$y = m(x - a) + b$$

Dérivation

Nombre dérivé

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Fonction dérivée

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Autres notations pour les dérivées:

$$\frac{dy}{dx} \qquad \frac{df}{dx} \qquad \frac{d}{dx} f(x)$$

Multiplication par un scalaire

$$\left[\alpha f(x)\right]' = \alpha f'(x)$$

Dérivation du monôme de degré n

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

Dérivation d'une somme

$$\left[f(x) + g(x)\right]' = f'(x) + g'(x)$$

Dérivation d'un produit

$$\left[f(x)g(x)\right]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Dérivation d'un quotient

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

Dérivation d'une fonction composée

$$\left[g(f(x))\right]' = g'(f(x)) \times f'(x)$$

Dérivation d'une fonction réciproque

Si $y = f(x)$ et $x = f^{-1}(y)$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Extremums

Si $y = f(x)$ admet un maximum ou un minimum en $x = a$, $f'(a) = 0$.
$y = f(x)$ est croissante autour de $x = a$ si $f'(a) > 0$.
$y = f(x)$ est décroissante autour de $x = a$ si $f'(a) < 0$.

Théorème des accroissements finis

Si $a < b$, il existe c vérifiant $a < c < b$ tel que

$$f(b) = f'(c)(b - a) + f(a)$$

Dérivées des fonctions classiques

Fonctions trigonométriques

$$(\cos\theta)' = -\sin\theta$$

$$(\sin\theta)' = \cos\theta$$

Fonction exponentielle

$$(e^x)' = e^x$$

FONCTION LOGARITHME

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

INTÉGRALES DÉFINIES

THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE

Lorsque $f(x) = F'(x)$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

RELATION DE CHASLES

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

INTÉGRALE D'UNE SOMME

$$\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$

CHANGEMENT DE VARIABLE

Lorsque $x = g(y)$, notons $b = g(\beta)$ et $a = g(\alpha)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(y))\,g'(y)\,dy$$

INTÉGRATION PAR PARTIES

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = \left[f(x)\,g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR

Le développement de Taylor de $f(x)$ en $x = a$ est

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2$$
$$+ \frac{1}{3!} f'''(a)(x-a)^3 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^{(n)} + \cdots$$

DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR DE QUELQUES FONCTIONS

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$
$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$
$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n + \cdots$$

DÉRIVÉES PARTIELLES

DÉRIVÉES PARTIELLES

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

DIFFÉRENTIELLE

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

RÈGLE DE LA CHAÎNE

Si $z = f(x, y)$ avec $x = a(t)$ et $y = b(t)$,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{da}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{db}{dt}$$

Index

A

B

C

D

G

I

L

M

N

O

P