

MP
Physique · Modélisation · Chimie
2021

Sous la coordination de

Vincent FREULON
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Ulm)

Alexandre HERAULT
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

Thomas DUPIC
ENS Ulm

Émilie FRÉMONT
professeur en CPGE

Vincent FREULON
professeur en CPGE

Alexandre HERAULT
professeur en CPGE

Jérôme LAMBERT
enseignant-chercheur à l'université

Tom MOREL
professeur en CPGE

Valentin QUINTANA LEYTON
École Polytechnique

Louis SALKIN
professeur en CPGE

Sommaire thématique de physique

2015 – 2021

e3a MP Physique et Chimie (2021)		•		•			•					•		
e3a PC Physique et Chimie (2021)		•							•	•				
e3a PSI Physique et Chimie (2021)					•				•	•				
CCINP MP Physique			•	••	••		••			•••	•••	••	••	••
CCINP MP Physique et Chimie	•••	••			•		•••			••	••	•	•	•
CCINP PC Physique	•••	••		••	••		•••	••	•	••	••	••	••	
CCINP PC Modélisation Phys-Chimie	••	••		•			••					•	•••	
CCINP PSI Physique et Chimie	•••	•••		•	•••	••	••	••	•	••	••	•		
CCINP PSI Modélisation numérique	••	••			••	••	•	••		••				••
Centrale MP Physique et Chimie 1	••	••	••	•	••		•••			••			••	
Centrale MP Physique et Chimie 2	•	•		••	•		••			••	••	•		
Centrale PC Physique 1	•			••	•		•	••	••	•••	••	••	••	
Centrale PC Physique 2	••	••	•	••	•		••	••	••	•	••	••	••	
Centrale PSI Physique et Chimie 1	••	••		••	••	••	••	••		••				
Centrale PSI Physique et Chimie 2	•••	••			••	••	••	••	•	••	•			
Mines MP Physique 1	••	•	•		••		•••		••	••	••	•	•	
Mines MP Physique 2	••	•	••	••	•		•••			••	•	••	••	
Mines PC Physique 1	••	•	•		••		••	••	••	••	••	••		
Mines PC Physique 2	••	•		•			••	••	••	••	••	••	••	
Mines PSI Physique 1	•	•			••		••	••	••	••	••	•		
Mines PSI Physique 2	•				••	••	••	••	••	••	••	•		
X/ENS MP Physique	••		•				••		•	••	••			
X/ENS MP Physique et SI	•	•		•	••		•••		•	•	••	•		
X/ENS PC Physique A	••	•			•		••	••	•	••	••	••		
X/ENS PC Physique B		•		••			••	••	••	••			•	
X/ENS PSI Physique	•	•		••	••	•	••		••	•	•	•		
X/ENS PSI Physique-Modélisation	•	•		•	••	••	••	••		•				••
	Thermodynamique générale	Phénomènes diffusifs	Physique statistique	Électrostatique et magnéto-statique	Électronique	Conversion de puissance	Mécanique du point et du solide	Mécanique des fluides	Ondes mécaniques et sonores	Électromagnétisme	Optique	Physique quantique	Informatique pour tous	

Sommaire

		Énoncé	Corrigé
	E3A		
Physique et Chimie	Mission prolongée pour la sonde Juno. <i>mécanique, électrostatique, optique géométrique, diffusion thermique, cristallographie, oxydoréduction, courbes courant-potentiel, thermodynamique</i>	11	24

CONCOURS COMMUN INP

Physique	Une brève histoire de la photographie. <i>optique géométrique, électronique, mécanique du point, référentiels non galiléens, électrostatique, électromagnétisme, informatique</i>	40	59
Physique et Chimie	Autour de la saga <i>Fast and Furious</i> . <i>mécanique, thermodynamique, électromagnétisme, physique quantique, cinétique chimique</i>	77	93

CENTRALE-SUPÉLEC

Physique et Chimie 1	La ruée vers l'or. <i>thermochimie, physique statistique, diffusion thermique, électromagnétisme, physique des ondes</i>	111	121
Physique et Chimie 2	Purification de l'eau du circuit primaire dans une centrale nucléaire. <i>optique ondulatoire, électromagnétisme, cristallographie, thermodynamique, solutions aqueuses</i>	143	152

MINES-PONTS

Physique 1	Jean Perrin et l'hypothèse atomique. <i>thermodynamique, mécanique du point, optique géométrique, statique des fluides, physique statistique</i>	169	176
Physique 2	Le marteau de Thor. <i>physique quantique, rayonnement, physique statistique</i>	187	194
Chimie	Autour du strontium. <i>cristallographie, solutions aqueuses, cinétique chimique, oxydoréduction, courbes courant-potentiel, thermodynamique</i>	205	211

POLYTECHNIQUE-ENS

Physique	Thermodynamique de l'atmosphère. <i>thermodynamique</i>	220	233
Physique et Sciences de l'Ingénieur	L'effet piézo-électrique et deux de ses applications. <i>mécanique du point, électrostatique, électronique</i>	254	271

FORMULAIRES

Constantes chimiques	296
Constantes physiques	299
Formulaire d'analyse vectorielle	300
Classification périodique	304

SESSION 2021



MP9PC

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

PHYSIQUE-CHIMIE

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont autorisées.

Ce problème est constitué de trois parties indépendantes.

Remarques préliminaires importantes

1. Il est rappelé aux candidat(e)s que les explications des phénomènes étudiés interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques.
2. Tout résultat fourni par l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le(la) candidat(e).
3. Les questions comportant le verbe "calculer" demandent une application numérique. Les résultats exprimés sans unité ne seront pas comptabilisés.

Les données utiles sont fournies en page 13.

Mission prolongée pour la sonde Juno

Introduction

Jupiter est la planète la plus volumineuse du système solaire et fait partie des planètes « géantes gazeuses ». Compte tenu du rôle central de la planète géante dans la formation du système solaire, celle-ci intrigue toujours les scientifiques puisque de nombreuses questions concernant sa formation restent sans réponse. En particulier, deux scénarios s'affrontent sur la manière dont la planète Jupiter s'est constituée :

- **premier scénario** : la planète s'est formée en deux temps - accréation¹ des matériaux situés dans son voisinage jusqu'à former un noyau solide représentant une dizaine de masses terrestres puis effondrement gravitationnel de la masse de gaz et de poussière entourant la planète ;
- **second scénario** : celui-ci repose sur le seul effondrement gravitationnel d'un nuage de gaz et de poussières mais nécessite la présence d'une nébuleuse originelle de plus grande taille que celle retenue dans les scénarios de formation du système solaire.

La sonde Juno a pour objectif principal de résoudre ce dilemme en collectant des données permettant de reconstituer l'histoire de la formation de la planète géante et son évolution.

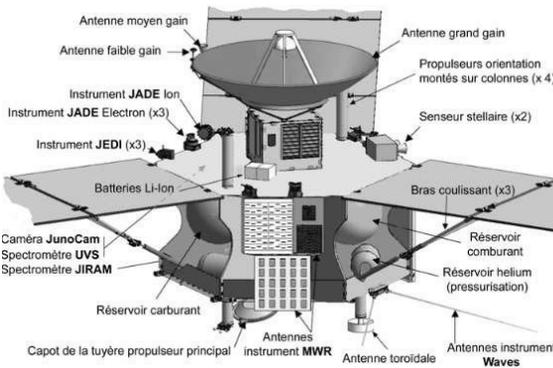


Figure 1 – Présentation de la sonde Juno - D'après Wikipedia

Partie I - Les caractéristiques de Jupiter

I.1 - Observer Jupiter depuis la Terre

C'est en janvier 1610, à l'aide d'une très modeste lunette astronomique, que Galilée se rendit compte de la présence de quatre points lumineux à proximité de la planète géante. En notant soigneusement leurs positions, plusieurs soirs de suite, il s'aperçut que ces quatre points étaient mobiles et comprit qu'ils tournaient autour de la planète. Galilée venait de découvrir les quatre satellites principaux de Jupiter.

1. processus d'agglomération

Le **tableau 1** regroupe certaines données concernant ces satellites dont les orbites sont quasi circulaires :

Satellite	Distance moyenne au centre de Jupiter	Période de révolution sidérale
Io	$4,218 \cdot 10^5$ km	1,769 jour
Europe	$6,714 \cdot 10^5$ km	3,551 jours
Ganymède	$1,070 \cdot 10^6$ km	7,155 jours
Callisto	$1,883 \cdot 10^6$ km	16,689 jours

Tableau 1 – Données concernant les principaux satellites de Jupiter

- Q1.** Énoncer la troisième loi de Kepler, puis estimer la masse de Jupiter en précisant la méthode utilisée. Comparer cette valeur à celle fournie en fin de sujet.
- Q2.** Calculer la masse volumique moyenne de cette planète.

Pour un observateur terrestre, Jupiter est vue sous un angle α qui varie suivant la distance Terre-Jupiter. Les orbites de la Terre et de Jupiter sont assimilées à des cercles ayant pour centre le Soleil, contenus dans un même plan, de rayons respectifs d_T et d_J et décrits dans le même sens. La planète Jupiter est modélisée en première approximation par une sphère de rayon R_J .

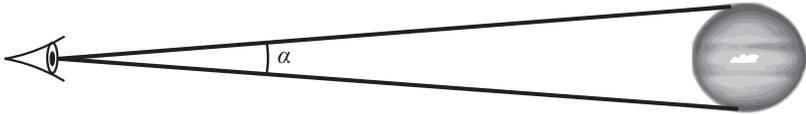


Figure 2 – Définition de l'angle α

- Q3.** Calculer l'angle maximal α_{\max} (en radians) sous lequel Jupiter est vue depuis la Terre.
- Q4.** Cette situation est la plus favorable à l'observation et porte le nom d'**opposition de Jupiter**. À l'aide des données fournies, évaluer la période de révolution sidérale T_J de Jupiter ainsi que la durée s'écoulant entre deux oppositions de celle-ci.

Une lunette astronomique est un système optique centré constitué d'un objectif et d'un oculaire. L'objectif est assimilé à une lentille mince convergente de centre optique O_1 , de distance focale $f'_1 = 100$ cm et de diamètre D_1 . L'oculaire est une lentille mince convergente de centre optique O_2 , de distance focale $f'_2 = 10$ cm et de diamètre D_2 .



Figure 3 – Lunette astronomique

L'objectif donne d'un objet éloigné une image réelle appelée image objective. Cette dernière est observée au moyen de l'oculaire.

e3a Physique et Chimie MP 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (professeur en CPGE) et Alexandre Herault (professeur en CPGE) ; il a été relu par Julien Dumont (professeur en CPGE), Tom Morel (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet s'intéresse à Jupiter et à la sonde Juno, dont la mission est l'étude de cette planète. Il se compose de deux parties de physique et d'une partie de chimie.

- La première partie débute par la détermination de la masse de Jupiter en utilisant sa période orbitale autour du Soleil. Il s'ensuit une estimation de son diamètre apparent lorsqu'elle est au plus proche de la Terre. Vient alors une étude du mouvement de la sonde Juno : après avoir retrouvé la vitesse de libération de la Terre, on s'intéresse au mouvement orbital de Juno autour de Jupiter. Les propriétés des mouvements à force centrale sont alors retrouvées. Il s'agit ensuite d'exprimer le champ et le potentiel gravitationnels de Jupiter en prenant en compte sa répartition de masse non uniforme et la déformation de la surface de la planète due à sa rotation propre. Enfin, une explication à la présence importante d'hélium et de dihydrogène dans les couches externes de Jupiter est développée.
- La deuxième partie porte sur la conduction thermique dans un assemblage de cartes électroniques équipant la sonde Juno. Grâce à une association en série des résistances thermiques des cartes, on montre que l'assemblage se comporte comme un milieu homogène, dont la conductivité équivalente est étudiée dans deux cas limites. Quelques questions très simples de cristallographie sur la maille diamant du germanium, présent dans les cartes électroniques, terminent cette partie.
- La troisième et dernière partie étudie les accumulateurs électrochimiques qui ont pour but de stocker l'énergie récupérée par les panneaux solaires de la sonde. On s'intéresse dans un premier temps à la réduction de l'eau par les métaux alcalins lithium et sodium. Les points de vue thermodynamique et cinétique, grâce aux courbes courant-potentiel, sont abordés. Dans un deuxième temps, la thermodynamique de la synthèse du trioxyde de soufre est étudiée. En particulier, les différents paramètres de déplacement d'équilibre sont présentés afin d'optimiser la synthèse.

Cet énoncé traite d'éléments du cours des deux années de classe préparatoire. Il s'agit d'une association de plusieurs exercices, ce qui permet de réviser des chapitres de manière ciblée.

INDICATIONS

Partie I

- 2 Le volume d'une boule de rayon R s'écrit $4\pi R^3/3$.
- 3 C'est lorsque Jupiter et la Terre sont les plus proches que l'angle α est maximal. Dans ce cas, la distance Terre-Jupiter est égale à $d_J - d_T$. Utiliser la trigonométrie pour relier α , R_J et $d_J - d_T$.
- 4 D'une part, exprimer l'angle dont la Terre a tourné, d'autre part celui dont Jupiter a tourné, en prenant comme instant initial une opposition. Quelle relation existe-t-il entre ces deux angles lors de l'opposition suivante ?
- 7 Construire la marche du rayon passant par le foyer objet F'_1 de la lentille (\mathcal{L}_1).
- 8 Exprimer g en fonction de \mathcal{G} , M_T et R_T . Traduire la conservation de l'énergie mécanique juste après le lancer depuis le sol terrestre et à l'infini (en se plaçant à la limite où la vitesse à l'infini est nulle).
- 12 Le vecteur \vec{C} est défini en fin de question.
- 15 Remarquer que lorsque r est extrémal, $\dot{r} = 0$. Traduire la conservation de l'énergie mécanique pour établir que r_{\min} et r_{\max} sont solutions de

$$u^2 - 2a u - \frac{mC^2}{2\mathcal{E}_m} = 0$$

- 18 Utiliser la formule d'analyse vectorielle fournie.
- 23 Introduire le projeté orthogonal H de P sur l'axe de rotation. L'accélération \vec{a} du point P s'écrit $\vec{a} = \omega_{\text{sid}}^2 \overrightarrow{HP}$.
- 24 Exprimer la force d'inertie d'entraînement dans le référentiel jovien (en supposant le référentiel jupitérocentrique galiléen).
- 25 D'après l'énoncé,
$$I_J = \frac{8\pi}{15} \rho R_J^5$$
 Il suffit alors de remplacer dans K .
- 27 Poser $\alpha = m/(2k_B T)$ et $g(u) = u^2 e^{-\alpha u^2}$. Chercher les extrema de g .

Partie II

- 30 La puissance thermique $\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2}$ est aussi appelée « flux thermique ». Elle s'obtient avec la loi de Fourier et la formule

$$\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2} = -\lambda j S$$

- 34 La coordinence est le nombre de premiers voisins.
- 35 Utiliser le contact entre atomes sur le quart de la diagonale de la maille.

Partie III

- 39 Plus E° est faible plus le réducteur est fort. Discuter de la stabilité de l'oxydant Li^+ grâce à sa structure électronique.
- 40 Le point de fonctionnement correspond au potentiel pour lequel les intensités anodique et cathodique sont égales en valeur absolue.
- 43 Utiliser la relation de Van 't Hoff et le signe de $\Delta_r H^\circ$.
- 44 Il faut se placer à l'équilibre, ce que l'énoncé ne précise pas.
- 45 K° ne dépend que T ! Regarder l'influence d'une augmentation de P sur le quotient réactionnel et conclure sur l'évolution du système à partir d'un état d'équilibre.

MISSION PROLONGÉE POUR LA SONDE JUNO

I. LES CARACTÉRISTIQUES DE JUPITER

1 D'après la troisième loi de Kepler, pour les planètes du Système solaire, le carré de leur période de révolution sur le cube du demi-grand axe de leur trajectoire autour du Soleil est égal à une constante indépendante de la planète.

Notons T la période d'un satellite de Jupiter et a le demi-grand axe de sa trajectoire autour de la planète. Transposée aux satellites de Jupiter, la troisième loi de Kepler donne

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_J}$$

Ainsi,

$$M_J = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}} \times \frac{a^3}{T^2}$$

À l'aide du tableau (1), on obtient

	Io	Europe	Ganymède	Callisto
a (m)	$4,22 \cdot 10^8$	$6,71 \cdot 10^8$	$1,07 \cdot 10^9$	$1,88 \cdot 10^9$
T (s)	$1,53 \cdot 10^5$	$3,07 \cdot 10^5$	$6,18 \cdot 10^5$	$1,44 \cdot 10^6$
$\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}} \times \frac{a^3}{T^2}$ (kg)	$1,90 \cdot 10^{27}$	$1,90 \cdot 10^{27}$	$1,90 \cdot 10^{27}$	$1,90 \cdot 10^{27}$

Par conséquent

$$M_J = 1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

On constate un écart systématique de $7 \cdot 10^{25}$ kg avec la valeur fournie.

C'est en fait la valeur fournie qui est fautive. La masse de Jupiter est estimée actuellement à $1,90 \cdot 10^{27}$ kg.

2 Assimilons Jupiter à une boule de rayon R_J à répartition de masse uniforme, de masse volumique ρ_J . Dans ce cas,

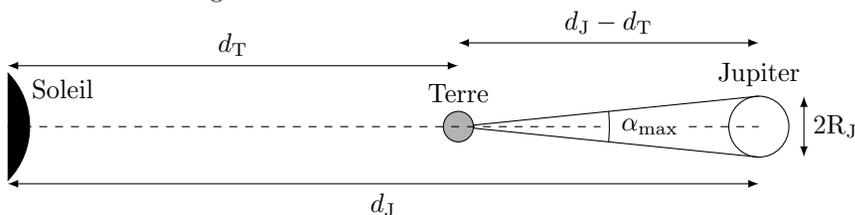
$$M_J = \frac{4\pi}{3} R_J^3 \rho_J$$

d'où

$$\rho_J = \frac{3M_J}{4\pi R_J^3} = \frac{3 \times 1,90 \cdot 10^{27}}{4\pi \times (7,0 \cdot 10^7)^3} = 1,3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Cette valeur, assez faible, suggère que la boule de rayon R_J , modélisant Jupiter, n'est pas constituée que de roches. Elle contient également une quantité non négligeable de gaz. C'est pour cette raison que l'on dit que Jupiter est une planète *gazeuse*.

3 L'angle α sous lequel Jupiter est vu depuis la Terre est maximal lorsque la distance Terre-Jupiter est minimale. C'est le cas lorsque le Soleil, la Terre et Jupiter sont alignés comme sur la figure suivante :



Alors

$$\alpha_{\max} = \frac{2R_J}{d_J - d_T}$$

$$= \frac{2 \times 7,0 \cdot 10^7}{(7,8 - 1,5) \cdot 10^{11}}$$

$$\alpha_{\max} = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

On s'est placé d'emblée dans l'approximation $\tan \alpha \simeq \alpha$, ce qui est légitime puisque $\tan \alpha \simeq 10^{-4}$ rad qui est petit devant 1 rad.

4 Appliquons la troisième loi de Kepler pour Jupiter et la Terre,

$$\frac{d_T^3}{T_T^2} = \frac{d_J^3}{T_J^2}$$

donc

$$T_J = \left(\frac{d_J}{d_T} \right)^{3/2} T_T$$

$$= \left(\frac{7,80}{1,50} \right)^{3/2} T_T$$

$$= 11,9 T_T$$

$$T_J = 4,33 \cdot 10^3 \text{ jours}$$

Supposons Jupiter et la Terre en opposition à l'instant initial. Notons τ l'instant suivant auquel les deux planètes sont de nouveau en opposition. Durant τ , le rayon vecteur de la Terre a balayé l'angle θ_T tel que

$$\theta_T = \frac{2\pi}{T_T} \tau$$

Pendant ce temps, le rayon vecteur de Jupiter balaie l'angle θ_J tel que

$$\theta_J = \frac{2\pi}{T_J} \tau$$

L'instant τ correspond à la plus petite valeur entière de n vérifiant

$$\theta_T = \theta_J + 2\pi n$$

soit

$$\left(\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_J} \right) \tau = n$$

Pour $n = 0$, on retrouve qu'à l'instant initial, il y a opposition. L'opposition suivante est obtenue pour $n = 1$, c'est-à-dire

$$\tau = \frac{T_J T_T}{T_J - T_T} = \frac{11,9}{11,9 - 1} T_T = 399 \text{ jours}$$

On peut également utiliser un raisonnement semblable à celui de Zénon pour présenter le paradoxe d'Achille et la tortue. Lorsque la Terre a effectué une révolution complète (pendant la durée T_T), le rayon vecteur de Jupiter a tourné de $T_T/11,9$. Pour « rattraper » Jupiter, le rayon vecteur de la Terre doit donc encore balayer l'angle $T_T/11,9$, mais pendant la durée correspondante le rayon vecteur de Jupiter a tourné de $T_T/(11,9)^2$, que le rayon vecteur de la Terre doit encore rattraper, et ainsi de suite :

$$\tau = T_T + \frac{T_T}{11,9} + \frac{T_T}{11,9} \times \frac{1}{11,9} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_T}{(11,9)^n} = \frac{T_T}{1 - 1/11,9}$$

qui redonne le même résultat.

CCINP Physique MP 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jérôme Lambert (enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Hector Abel (ENS Cachan) et Vincent Freulon (professeur en CPGE).

Ce problème intitulé « Une brève histoire de la photographie » propose d'étudier différents aspects de la physique des appareils photographiques.

- Dans la partie I, on aborde la formation d'une image dans le cadre de l'optique géométrique à l'aide d'un modèle simple d'appareil photographique basé sur des lentilles minces qui forment un objectif ou un téléobjectif. Après avoir exploité le grandissement d'un tel dispositif, on se penche sur le lien entre la focale et les caractéristiques géométriques d'une lentille mince.
- La partie II complète la partie I en proposant d'étudier l'exposition d'une photo, notamment l'influence de différents paramètres de réglage de l'appareil. Elle aborde en outre le nombre de photons et la quantité d'énergie reçus durant cette exposition.
- La partie III évoque très brièvement l'aspect quantique des capteurs CCD des appareils modernes.
- Dans la partie IV, on s'intéresse aux paramètres influençant la portée d'un flash ainsi qu'à un modèle électronique simple de son fonctionnement.
- La partie V est consacrée à l'étude d'un stabilisateur basé sur un accéléromètre modélisé comme un oscillateur mécanique amorti. Le déplacement de cet oscillateur est mesuré à l'aide d'un dispositif capacitif.
- Dans la partie VI, on aborde la polarisation du rayonnement diffusé par les molécules de l'atmosphère et le parti que peut en tirer un appareil photo auquel on adjoint un filtre polarisant.
- La partie VII a pour objet le traitement numérique des images enregistrées par un appareil photo afin d'en caractériser le niveau d'exposition à travers l'élaboration d'un histogramme.

Ce sujet aborde de nombreux chapitres du programme de MP. Les différentes parties sont de longueurs inégales et certains documents peuvent sembler superflus, mais l'ensemble est intéressant. S'il ne présente pas de grandes difficultés techniques, il nécessite une excellente connaissance du cours car il s'appuie sur de nombreuses approximations et hypothèses qui sont au cœur des chapitres utilisés. Il constitue une excellente occasion de jauger sa maîtrise de ces derniers.

INDICATIONS

Partie I

- 6.b Pour que l'image soit réelle, il faut que $\overline{O_2A'} \geq 0$.
- 7.a La distance d doit être à nouveau considérée comme la distance de la première lentille au capteur.
- 8 Le Mont Saint-Michel occupe environ $1/3$ de la hauteur de la photo.
- 9.b On remarque que $OF' = OS - KS + KF'$.
- 10.a Que se passe-t-il pour $\overline{OF'}$ lorsque i varie ?

Partie II

- 12.a Le triangle d'exposition est construit de manière à ce que les graduations sur les différents axes soient équidistantes. Tracer le premier triangle et le tourner de 120° vers la droite.

Partie III

- 16 Quelles sont les longueurs d'onde extrêmes du spectre visible ?

Partie IV

- 18 Combien de temps met la lumière pour parcourir 10 m ?

Partie V

- 25.a Attention à la coquille de l'énoncé sur l'amplitude. Il faut lire

$$X_m = \frac{A_m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega\omega_0/Q)^2}}$$

Partie VI

- 33.a Il s'agit d'estimer la puissance rayonnée à travers un élément de surface porté par \vec{e}_r .

1.a Dans les conditions de Gauss, les rayons :

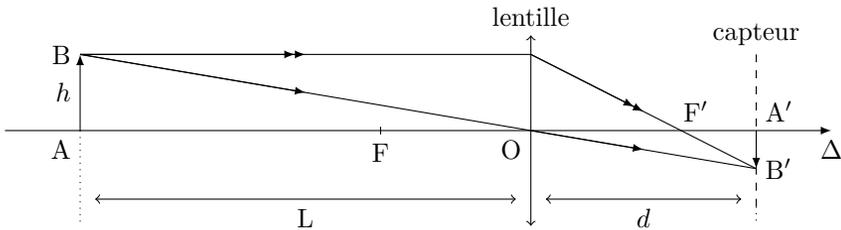
- sont peu inclinés par rapport à l'axe optique ;
- atteignent la lentille au voisinage de son centre optique.

On parle alors de rayons paraxiaux.

Si ces conditions sont vérifiées, les propriétés d'aplanétisme (l'image d'un objet contenu dans un plan perpendiculaire à l'axe optique est également contenue dans un plan perpendiculaire à l'axe optique) et de stigmatisme (l'image d'un point est un point) sont vérifiées de manière approchée.

1.b Tel qu'il est placé ici, le **diaphragme** permet de sélectionner les rayons proches du centre optique et limite un peu leur écart angulaire avec l'axe optique.

2.a On représente la situation en adoptant des dimensions permettant de visualiser les rayons et les différents points pertinents :



2.b D'après la dernière relation de conjugaison rappelée :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$$

donc
$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \times \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = h \frac{f'}{(f' - L)}$$

Or $L \gg f'$, donc
$$\overline{A'B'} \approx -\frac{hf'}{L} = -\frac{50 \cdot 10^{-3} \times 5}{20} = -12,5 \text{ mm}$$

3.a Par définition, l'image d'un objet à l'infini se forme dans le plan focal image, et

$$d = f' = 50 \text{ mm}$$

3.b Écrivons la première relation de conjugaison fournie en fonction de $d = \overline{OA'}$, de $L = -\overline{OA}$ et de $f' = \overline{OF'}$:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{L} = \frac{1}{f'}$$

Isolons L :
$$L = \frac{f'd}{d - f'} = f' \frac{x}{x - 1} = f'g(x) \quad \text{avec} \quad x = \frac{d}{f'}$$

Étant une distance, L doit être positive. Ceci n'est possible que pour $x > 1$. Calculons la dérivée de $g(x)$:

$$g'(x) = \left(\frac{x}{x-1} \right)' = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

Il s'agit donc d'une fonction décroissante pour $x > 1$. **La valeur minimale L_{\min} de L est donc atteinte pour la valeur maximale x_{\max} , soit pour $d = d_{\max}$.**

3.c D'après la question précédente,

$$L_{\min} = \frac{f' d_{\max}}{d_{\max} - f'}$$

3.d L'application numérique donne

$$L_{\min} = \frac{50.10^{-3} \times 55.10^{-3}}{55.10^{-3} - 50.10^{-3}} = 55 \text{ cm}$$

4.a Faisons appel à la même expression qu'à la question 2.b avec la nouvelle valeur de la distance focale pour trouver :

$$\overline{A'B'} \approx -\frac{hf'_1}{L} = -\frac{100.10^{-3} \times 5}{20} = -25 \text{ mm}$$

4.b Le capteur a pour dimensions 24 mm × 36 mm et, d'après la question précédente, l'image de l'arbre a pour hauteur 25 mm sur le capteur. **Il est donc possible de voir l'arbre en entier sur le capteur si l'on prend la photo en mode portrait.**

5 Un téléobjectif est utilisé pour photographier les détails d'objets lointains, pour lesquels on a $L \gg f'$. Comme à la question 2.b, on considère que $L - f' \approx L$ dans l'expression de la taille de l'image sur le capteur :

$$\overline{A'B'} \approx -\frac{hf'}{L} = f'\alpha$$

où α est l'angle sous lequel on voit l'objet sans appareil photo. On constate que :

- L'image sur le capteur d'un objet lointain est d'autant plus grande que la focale est grande. Un téléobjectif ou « objectif de longue focale » permet donc d'obtenir une image de grande taille. Par exemple, un téléobjectif de 300 mm forme une image 6 fois plus grande qu'un objectif de 50 mm sur le capteur ;
- Le capteur étant de taille constante, l'augmentation de la taille de l'image peut entraîner le fait qu'elle ne peut plus être entièrement contenue dans le cadre du capteur : l'agrandissement s'accompagne d'une perte de champ latéral.

Ces deux facteurs contribuent à **donner l'illusion que l'image obtenue a été prise proche de l'objet.**

6.a Calculons d'abord la distance $\overline{O_1A_1}$ du centre de (L_1) à l'image de l'arbre. D'après la première relation de conjugaison rappelée,

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1}$$

où $\overline{O_1A} = -L$, donc

$$\overline{O_1A_1} = \frac{f'_1 L}{L - f'_1}$$

Les données montrent que $f'_1 \ll L$, donc on adopte **l'approximation qui consiste à considérer l'arbre comme étant situé à l'infini :**

$$\overline{O_1A_1} = f'_1$$

Comme $\overline{O_1O_2} = e$,

$$\overline{O_2A_1} = \overline{O_1A_1} - \overline{O_1O_2} = f'_1 - e$$

CCINP Physique et Chimie MP 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (professeur en CPGE) et Alexandre Herault (professeur en CPGE) ; il a été relu par Vincent Freulon (professeur en CPGE), Émilie Frémont (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet composé de cinq parties indépendantes traite de la physique-chimie du film *Fast and Furious*.

- La partie I étudie la traction d'un container métallique par une voiture. Tout d'abord, on détermine la force nécessaire pour tirer le container puis on veut trouver la masse maximale que la voiture peut tracter en fonction de la position du moteur dans la voiture. Cette partie fait exclusivement appel à des notions de mécanique.
- La partie II traite de l'effet Doppler. À partir des relations de transformation du champ électromagnétique d'un référentiel galiléen à un autre, on relie la fréquence de l'onde incidente à celle de l'onde réfléchie. Seuls des outils d'électromagnétisme et de traitement du signal sont nécessaires pour traiter ces questions.
- L'étude thermodynamique de quelques moteurs thermiques est conduite dans la partie III. Tout d'abord, on étudie le cycle de Beau de Rochas et on calcule le rendement de ce moteur. Puis on s'intéresse plus particulièrement à la combustion d'un mélange air/carburant et notamment à l'expression de la puissance motrice. Finalement, on envisage quelques améliorations de ce dispositif. Cette partie sollicite essentiellement des notions de thermodynamique.
- Dans la partie IV, dédiée à la chimie, on s'intéresse au protoxyde d'azote N_2O . On décrit tout d'abord sa structure de Lewis, puis on étudie la thermodynamique de sa réaction de production à partir du nitrate d'ammonium. Dans une dernière sous-partie, c'est la cinétique de sa décomposition qui est abordée. Décomposition qui produit le dioxygène en surplus, utilisé par les kit NOS pour augmenter la puissance des moteurs tunés. Dans cette partie, les questions sont presque toutes des applications immédiates du cours, ou de formules de cours redonnées dans l'énoncé.
- La partie V, très courte, concerne l'étude de la couleur de cristaux et repose sur des notions simples de physique quantique.

Ce sujet assez long alterne des questions très proches du cours et d'autres plus difficiles. Cette épreuve peut constituer un bon sujet d'entraînement en mécanique et en thermodynamique pour les étudiants de première comme de seconde année.

INDICATIONS

Partie I

- 2 Le container se déplace à vitesse constante : son accélération est nulle.
- 3.a Utiliser le théorème de la puissance cinétique.
- 4.c Appliquer le théorème du moment cinétique en projection sur \vec{u}_y .
- 7.b Écrire la condition de non glissement puis trouver une inégalité vérifiée par la masse m_0 .

Partie II

- 11.a La relation de continuité doit être vérifiée à tout instant : les arguments des exponentielles sont égaux.
- 13.c La durée d'échantillonnage T_{tot} peut s'écrire $T_{\text{tot}} = (N - 1)/f_s$.

Partie III

- 18 Invoquer la conservation du débit massique.
- 19.a Une mole de carburant consomme 25/2 moles de dioxygène.
- 24 Utiliser l'approximation $\dot{m} \simeq \dot{m}_{\text{air}}$.
- 25 La masse d'air admise pour les quatre cylindres est $\rho_{\text{ad}}C$.
- 30 Deux moles de N_2O sont consommées pour former une mole de dioxygène.

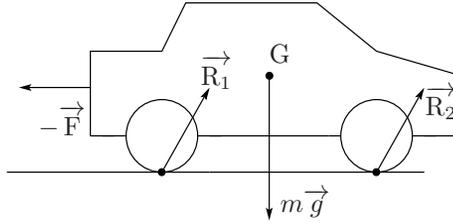
Partie IV

- 34.a Le terme « mésomère » n'est pas au programme. Il convient de représenter des structures de Lewis différentes pour N_2O .
- 34.b Il n'y a pas de notion de probabilité pour les formules mésomères. Raisonner sur la structure la plus représentative de la réalité en comparant les électronégativités des éléments.
- 35.a Il faut faire intervenir les enthalpies standard de changement d'état pour obtenir les enthalpies standard de formation des composés dans le bon état physique. Utiliser ensuite la relation de Van 't Hoff.
- 35.b Pour un changement d'état, on a $\Delta_r G^\circ = 0$.
- 36 Écrire l'expression du quotient réactionnel et regarder son évolution à partir d'un état d'équilibre dans les deux cas considérés.
- 37 Relier l'avancement de (2) à $n(t)$ et n_1 , puis exprimer la quantité totale de gaz.
- 43 Calculer la constante de vitesse à 1 200 K en intégrant la loi d'Arrhenius.

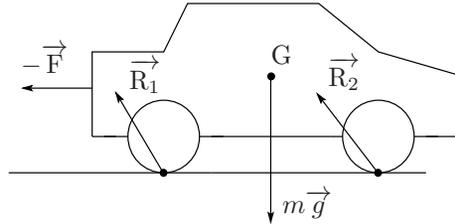
SÉQUENCE PHYSIQUE-CHIMIE DANS L'UNIVERS-FICTION DE « FAST AND FURIOUS »

I. COURSE-POURSUITE DANS LES RUES DE RIO : UNE OPÉRATION SAVAMMENT PRÉPARÉE ?

1 Le schéma est le suivant :



Les composantes verticales \vec{N}_1 et \vec{N}_2 sont nécessairement vers le haut pour traduire que le sol empêche la voiture de tomber sous l'effet du poids, mais l'orientation des composantes horizontales \vec{T}_1 et \vec{T}_2 n'est pas évidente. Par exemple, le schéma ci-dessous est tout autant acceptable.



2 Appliquons le principe fondamental de la dynamique au container, dans le référentiel du sol supposé galiléen :

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + m_0 \vec{g} + \vec{R}_0$$

D'après l'énoncé, $\vec{R}_0 = -T_0 \vec{u}_x + N_0 \vec{u}_z$ et le système se déplace avec une vitesse \vec{V} constante. L'équation précédente devient dans ces conditions

$$\vec{0} = \vec{F} + m_0 \vec{g} - T_0 \vec{u}_x + N_0 \vec{u}_z$$

La projection de cette équation sur les deux axes (Ox) et (Oz) donne

$$\begin{cases} F = T_0 \\ N_0 = m_0 g \end{cases}$$

Le container est en acier : le coefficient de frottement solide est f_0 . **La loi de Coulomb du frottement** impose $T_0 = f_0 N_0 = f_0 m_0 g$ lors du glissement. On en déduit

$$\vec{F} = F \vec{u}_x = f_0 m_0 g \vec{u}_x$$

3.a D'après l'énoncé, les actions de contact chaussée/roues et le poids sont associées à des puissances nulles. Or, la voiture se déplace à une vitesse V constante : son énergie cinétique est constante. Le théorème de la puissance cinétique à la voiture s'écrit

$$\frac{dE_c}{dt} = 0 = \mathcal{P}(-\vec{F}) + \mathcal{P}_m$$

La force $-\vec{F}$ est opposée au mouvement : $\mathcal{P}(-\vec{F}) = -FV$. Avec la question 2,

$$\mathcal{P}_m = FV = f_0 m_0 g V$$

La puissance \mathcal{P}_m développée par le moteur compense la puissance des frottements solides au niveau du container. Le modèle étudié est approximatif, car à ces vitesses, les frottements dus à l'air ne peuvent pas être oubliés.

3.b L'application numérique donne

$$\mathcal{P}_m = 0,4 \times 4,5 \cdot 10^3 \times 10 \times \frac{90}{3,6} = 5 \cdot 10^5 \text{ W} = 6 \cdot 10^2 \text{ ch}$$

Une voiture de sport peut avoir un moteur de plusieurs milliers de chevaux. **Une seule voiture est suffisante.**

4.a Dans un référentiel galiléen,

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)$$

avec L_Δ le moment cinétique du système par rapport à l'axe de rotation Δ orienté et $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)$ le moment de la force \vec{F}_i projeté sur l'axe Δ .

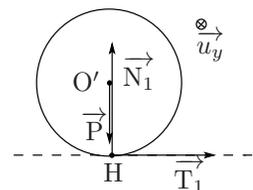
4.b La roue arrière est soumise à

- à la réaction du sol ;
- à son poids \vec{P} ;
- à la force qu'exerce le reste de la voiture sur le châssis de l'arbre des roues (liaison pivot) ;
- à un couple lié à la liaison pivot.

La roue avant est soumise à des efforts similaires auxquels on doit ajouter le couple moteur exercé par le moteur de la voiture.

4.c On se place dans le référentiel de **la voiture**. Comme la voiture est en translation rectiligne uniforme dans le référentiel du sol supposé galiléen, le référentiel de la voiture est lui-même galiléen. **L'origine du repère se situe au centre de chaque roue et ses axes sont identiques à ceux du référentiel du sol.**

La vitesse de rotation des roues avant et arrière est constante : la dérivée de leur moment cinétique par rapport au temps est nulle. De plus, les liaisons pivot sont parfaites : leur moment est nul. Finalement, appliquons le théorème du moment cinétique à la roue arrière, en projection sur l'axe Δ de rotation de la roue,



$$0 = (\vec{O'O'} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u}_y + (\vec{O'H} \wedge \vec{T}_1) \cdot \vec{u}_y + (\vec{O'H} \wedge \vec{N}_1) \cdot \vec{u}_y$$

Centrale Physique et Chimie 1 MP 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Émilie Frémont (professeur en CPGE) ; il a été relu par Vincent Freulon (professeur en CPGE), Tom Morel (professeur en CPGE) et Alexandre Herault (professeur en CPGE).

Métal noble par excellence, l'or a historiquement suscité de nombreuses « ruées » à travers le monde, motivées par la perspective d'une richesse certaine pour quiconque trouverait un bon filon. Dans ce sujet, à la motivation purement scientifique et appliquée, on envisage quelques propriétés physico-chimiques de l'or, non pas sous forme de pépites mais de nanoparticules.

- Dans la partie I, on met en évidence l'intérêt des nanoparticules d'or pour la catalyse hétérogène sur l'exemple particulier de la réaction d'oxydation du monoxyde de carbone. Pour ce faire, des notions de thermochimie, de cinétique, puis de physique statistique sont sollicitées tour à tour.
- La partie II se concentre sur l'étude du comportement thermique d'un milieu gélifié contenant des nanoparticules d'or. Il s'agit de montrer que l'utilisation d'un laser bien accordé engendre un échauffement du milieu gélifié, par diffusion, au voisinage immédiat des nanoparticules, permettant leur détection par des méthodes optiques.
- Dans les parties III et IV, on aborde la modélisation de la réponse d'une nanoparticule d'or à une excitation électromagnétique. Une fois déterminées les caractéristiques du métal intervenant dans le modèle de Drüde, on établit l'existence d'une pulsation de résonance optique dont on cherche finalement à savoir si elle permet d'interpréter la coloration spécifique des nanoparticules.

Ce problème, de longueur raisonnable, fait appel aux thématiques incontournables du programme de la filière MP autour d'une problématique moderne et motivante. Son énoncé, bien construit et progressif, en fait un excellent problème de révisions pour tous les étudiants de la filière MP, quels que soient leurs objectifs aux concours. Plus largement, les parties II à IV pourront également intéresser vivement les étudiants des filières PC et PSI.

INDICATIONS

Partie I

- 3 Si on note n_0 la quantité initiale de monoxyde de carbone dans le système, le taux de conversion α est

$$\alpha = \frac{n_0 - n(\text{CO}_{(g)})}{n_0}$$

- 6 Le taux de sites vacants est donné par $1 - \theta$.
- 11 Exploiter la formule du binôme (rappelée en annexe) pour calculer explicitement la fonction de partition.

Partie II

- 17 Comparer les ordres de grandeur des deux termes figurant dans le membre de gauche de l'équation différentielle établie à la question 17.
- 21 Rapprocher les expressions de $T_s(t)$ et de $T(a, t)$.
- 22 Pour déterminer la moyenne spatiale de $T(r, t) - T_0$ sur la sphère \mathcal{V} , de centre O et de rayon r_{th} , calculer

$$\overline{\delta T} = \frac{1}{4\pi r_{\text{th}}^3/3} \iiint_{\mathcal{V}} [T(r, t) - T_0] \, d\tau$$

Partie III

- 27 En l'absence des champs \vec{E}_1 et \vec{B}_1 , le métal est localement neutre et il n'y a pas de courant de conduction à considérer.
- 32 Les électrons libres correspondent aux électrons de valence des atomes d'or engagés dans la structure métallique.

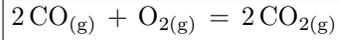
Partie IV

- 34 Exploiter le principe de superposition.
- 41 La longueur d'onde principalement absorbée est celle qui maximise la partie imaginaire de la polarisabilité complexe. Dans le domaine spectral d'intérêt, on a en outre $\tau\omega \gg 1$.

LA RUÉE VERS L'OR

I. UTILISATION DES NANOPARTICULES D'OR EN CATALYSE HÉTÉROGÈNE

1 Ramenée à une mole de dioxygène, l'équation de réaction qui modélise l'oxydation du monoxyde de carbone s'écrit



2 D'après la loi de Hess à 298 K, on a

$$\begin{aligned} \Delta_r H^\circ &= 2 \Delta_f H^\circ (\text{CO}_{2(g)}) - 2 \Delta_f H^\circ (\text{CO}_{(g)}) - \Delta_f H^\circ (\text{O}_{2(g)}) \\ &= 2 \times (-393,5) - 2 \times (-110,6) - 0 \\ \Delta_r H^\circ &= -565,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Par ailleurs, la définition de l'entropie standard de réaction permet d'écrire

$$\begin{aligned} \Delta_r S^\circ &= 2 S^\circ (\text{CO}_{2(g)}) - 2 S^\circ (\text{CO}_{(g)}) - S^\circ (\text{O}_{2(g)}) \\ &= 2 \times 213,7 - 2 \times 197,6 - 204,8 \\ \Delta_r S^\circ &= -172,6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Même si elles ne sont pas explicitement demandées par l'énoncé, ces applications numériques s'avèreront utiles pour la question 4. Autant les réaliser dès à présent !

On accède ensuite à la valeur de l'enthalpie libre standard de réaction à $T = 298 \text{ K}$:

$$\begin{aligned} \Delta_r G^\circ &= \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ \\ &= -565,8 \cdot 10^3 - 298 \times (-172,6) \\ \Delta_r G^\circ &= -514,3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Puis, la définition de la constante d'équilibre thermodynamique donne

$$\begin{aligned} K^\circ &= \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{-514,3 \cdot 10^3}{8,31 \times 298}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$K^\circ = 1,6 \cdot 10^{90}$$

3 En considérant le mélange gazeux idéal, la constante d'équilibre s'écrit

$$K^\circ(T) = \frac{y_e^2(\text{CO}_2)}{y_e^2(\text{CO}) y_e(\text{O}_2)} \frac{P^\circ}{P}$$

où les y_e désignent les fractions molaires à l'équilibre des différentes espèces en phase gazeuse. En notant n_0 la quantité de matière initiale de monoxyde de carbone, on peut dresser le bilan de matière suivant :

	2 CO _(g)	+	O _{2(g)}	=	2 CO _{2(g)}
état initial	n_0		σn_0		0
équilibre	$(1 - \alpha_e) n_0$		$(\sigma - \alpha_e/2) n_0$		$\alpha_e n_0$

Par suite, à l'équilibre, la quantité totale de gaz dans le système est donnée par

$$n_{e,\text{gaz}} = \left(1 + \sigma - \frac{\alpha_e}{2}\right) n_0$$

si bien que l'on obtient, après simplifications,

$$K^\circ(T) = \frac{\alpha_e^2 (1 + \sigma - \alpha_e/2) P^\circ}{(1 - \alpha_e)^2 (\sigma - \alpha_e/2) P}$$

4 Les calculs conduits dans la question 2 montrent que la réaction d'oxydation du monoxyde de carbone est exothermique ($\Delta_r H^\circ < 0$). Selon la loi de Van't Hoff,

$$\frac{d \ln K^\circ}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$$

La constante d'équilibre est donc une fonction décroissante de la température : **sur le plan thermodynamique, la réaction d'oxydation du monoxyde de carbone est favorisée par une basse température.**

Par ailleurs, conformément à l'expression établie à la question 3, le quotient de réaction est inversement proportionnel à la pression P du système. En augmentant la pression de dP (avec $dP > 0$), on induit alors une diminution du quotient de réaction :

$$Q_r(P + dP) < Q_r(P)$$

En supposant que l'on opère à température fixée, la constante d'équilibre n'est pas impactée par l'élévation de la pression. Le système étant supposé à l'équilibre initialement, on a alors

$$Q_r(P + dP) < K^\circ(T)$$

On observe alors un déplacement de l'équilibre dans le sens direct, ce qui tend à réduire la quantité totale de gaz présente dans le système. **La réaction d'oxydation du monoxyde de carbone est ainsi favorisée par une haute pression.**

La condition de basse température étant défavorable sur le plan cinétique, il semble judicieux de catalyser la réaction en introduisant de l'or dans le système : **le recours à un catalyseur permet de s'affranchir de tout blocage cinétique induit par les conditions expérimentales thermodynamiquement favorables.**

5 Pour favoriser l'oxydation du monoxyde de carbone, il convient de choisir la valeur du paramètre σ qui conduit au plus grand taux de conversion à l'équilibre. Or, à température et pression fixées, la valeur de $F(\alpha_e)$ à l'équilibre est imposée par la constante d'équilibre, via la relation

$$F(\alpha_e) = \frac{K^\circ P}{P^\circ}$$

Une fois $F(\alpha_e)$ connue, on peut déterminer, grâce aux courbes de la figure 1, son antécédent α_e . Il apparaît alors que le taux de conversion à l'équilibre augmente avec σ , ce qui oriente vers le recours à un excès de dioxygène. Néanmoins, une lecture attentive des courbes révèle également l'existence d'une asymptote au niveau de laquelle se confondent les courbes associées à des valeurs de σ supérieures ou égales à 5. Dans un souci d'optimisation de la quantité de réactifs mis en présence, il ne semble donc pas pertinent d'introduire le dioxygène en trop large excès. **Pour favoriser l'oxydation du monoxyde de carbone, il convient d'introduire le dioxygène en excès par rapport au monoxyde de carbone, de sorte que les proportions initiales correspondent à $\sigma \approx 5$.**

Centrale Physique et Chimie 2 MP 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexandre Herault (professeur en CPGE) et Louis Salkin (professeur en CPGE); il a été relu par Tom Morel (professeur en CPGE), Vincent Freulon (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet traite de la purification de l'eau du circuit primaire dans une centrale nucléaire. Il est composé de trois parties indépendantes.

- Dans la partie I, on étudie la structure électronique du plutonium ainsi que la structure cristalline de l'oxyde de plutonium. Les notions classiques de population, coordinence, ainsi que masse volumique du matériau sont utilisées.
- Dans la partie II, on s'intéresse à la purification de l'eau à l'aide de résines échangeuses d'ions. La résine utilisée est initialement chargée en ions H^+ , que l'on échange avec des cations Na^+ d'une solution de soude. Le titrage acido-basique de l'excès de soude permet de déterminer la capacité maximale d'échange, qui est une grandeur caractéristique de la résine. Notons que quelques questions concernent l'incertitude du dosage.
- La partie III présente la méthode de spectrométrie ICP-AES. On s'intéresse tout d'abord à la résolution spectrale de l'instrument. On estime cette caractéristique pour un dispositif interférentiel simplifié à 2 ondes (trous d'Young) puis pour un réseau à N ondes plus proche du système réel. On étudie ensuite la torche à plasma et ses interactions avec le champ magnétique du bobinage d'induction haute fréquence. Deux modèles sont successivement développés dans le but de modéliser la puissance cédée par le champ électromagnétique au plasma, nécessaire à l'entretien de ce dernier. Cette partie fait appel aux notions d'optique ondulatoire et d'électromagnétisme de deuxième année.

Ce sujet ne contient pas de grosse difficulté. Il permet d'aborder la technique de spectrométrie ICP-AES au travers de modèles simplifiés proches du cours de deuxième année. Les questions s'enchaînent de manière fluide, et certains résultats intermédiaires sont donnés.

INDICATIONS

Partie I

- 3 Un cristal est toujours neutre.
- 4 La coordinence est le nombre de premiers voisins.
- 5 Déterminer le paramètre de maille à l'aide de la masse volumique, puis utiliser la condition de contact.

Partie II

- 7 L'échelle est logarithmique sur la figure 4, il faut raisonner sur $\log K^\circ$. Utiliser la relation liant $\Delta_r G^\circ$ et K° .
- 8 Exprimer le quotient réactionnel en fonction de la pression totale et des fractions molaires.
- 9 Utiliser la relation de Van 't Hoff.
- 14 L'échantillon dosé a un volume moitié moindre que l'échantillon initial.

Partie III

- 18 Faire un tracé de rayons, et invoquer le théorème de Malus couplé au principe de retour inverse de la lumière.
- 21 Pour résoudre deux longueurs d'onde λ et λ' voisines, l'écart entre deux franges brillantes associées à λ et λ' , d'ordre m identique, doit être supérieur à la largeur des franges.
- 25 Montrer que $N \gg 1$. Tirer parti de cette condition en utilisant le développement suivant, valable pour $\varepsilon \ll x$:

$$\text{Arcsin}(x + \varepsilon) \simeq \text{Arcsin}(x) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-x^2}}$$

- 32 Le champ électrique génère un courant dans le plasma. Les symétries des courants et du champ magnétique sont inversées.
- 35 Il est préférable d'écrire la solution comme une combinaison linéaire de cosinus et sinus hyperboliques, plutôt qu'une combinaison linéaire d'exponentielles.
- 37 La dérivée d'une fonction périodique est de valeur moyenne nulle.

40 Utiliser
$$i = e^{i\pi/2} = (e^{i\pi/4})^2 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$$

I. LE PLUTONIUM DANS LE COMBUSTIBLE NUCLÉAIRE MOX

1 Le plutonium se situe dans la **7^e ligne** de la classification périodique (valeur maximale de n) et dans le **bloc f** (car 5f est la sous-couche en cours de remplissage). Il possède **huit électrons de valence $5f^6 7s^2$** . Les électrons identiques à la structure électronique du radon Rn constituent les électrons de cœur.

2 La sous-couche d'orbitales 5f est composée de sept orbitales atomiques. D'après la règle de Hund, lorsque l'on place six électrons dans cette sous-couche, ils sont tous célibataires et de spins parallèles : **le plutonium possède donc des électrons célibataires**. La couche 5 correspond à $n = 5$ et les orbitales f correspondent à $\ell = 3$. On peut alors choisir m_ℓ entier entre -3 et $+3$ et $m_s = \pm 1/2$, soit par exemple le quadruplet

$$(5, 3, 0, +1/2)$$

3 Pour l'oxyde de plutonium, la neutralité électrique impose qu'il faut deux fois plus d'ions oxyde O^{2-} que d'ions plutonium Pu^{4+} .

- **Structure A** : Les sphères claires représentent les ions plutonium et les foncées les ions oxyde :

$$Z_{Pu^{4+}} = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$$

et

$$Z_{O^{2-}} = 8 \times 1 = 8$$

La neutralité électrique est respectée.

- **Structure B** : Il y autant de sphères claires que de sphères foncées dans cette structure :

$$Z = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 1 + 12 \times \frac{1}{4} = 4$$

La neutralité électrique n'est pas respectée : cette structure est impossible.

C'est la structure A qui représente l'oxyde de plutonium. Il y a ainsi **4 motifs PuO_2** par maille. La formule brute est **PuO_2** .

4 Les ions oxyde occupent des sites tétraédriques, leur coordinence est donc **[4]**. Les ions plutonium sont entourés par huit ions oxydes, ils occupent des sites cubiques, leur coordinence est donc **[8]**.

5 On note a le paramètre de maille. Les ions sont en contact sur le quart de la diagonale de la maille :

$$\frac{a\sqrt{3}}{4} = R(O^{2-}) + R(Pu^{4+})$$

La masse volumique de l'oxyde s'écrit

$$\rho = \frac{Z\mathcal{M}(PuO_2)}{N_A a^3}$$

soit
$$a = \sqrt[3]{\frac{Z\mathcal{M}(PuO_2)}{N_A \rho}} = \sqrt[3]{\frac{4 \times (244 + 2 \times 16)}{6,02 \cdot 10^{23} \times 11,5 \cdot 10^6}} = 542 \text{ pm}$$

La condition de contact s'écrit alors numériquement

$$\frac{542\sqrt{3}}{4} = 140 + R(\text{Pu}^{4+})$$

soit

$$R(\text{Pu}^{4+}) \approx 95 \text{ pm}$$

La valeur trouvée est proche de la valeur tabulée. L'écart peut s'expliquer par le fait que cations et anions ne sont peut-être pas en contact, et/ou que la liaison n'est pas parfaitement ionique et possède un caractère partiel covalent.

6 La compacité est le rapport du volume occupé sur le volume total :

$$c = \frac{4 \times \left(\frac{4}{3} \pi R(\text{Pu}^{4+})^3 + 2 \times \frac{4}{3} \pi R(\text{O}^{2-})^3 \right)}{a^3}$$

AN:

$$c = \frac{4 \times \left(\frac{4}{3} \pi \times 95^3 + 2 \times \frac{4}{3} \pi \times 140^3 \right)}{542^3} = 0,67$$

67 % de l'espace est occupé par les ions, le reste est constitué de trous. C'est une structure ionique assez compacte, on atteint presque la valeur d'une structure compacte constituée d'un seul type de sphères (74 %).

II. LES RÉSINES ÉCHANGEUSES D'IONS ET LA PURIFICATION DE L'EAU

7 Les points de la figure 4 sont alignés et l'échelle est logarithmique, ce qui permet de conclure que la représentation de $\ln K^\circ = f(1/T)$ est une droite. En utilisant l'enthalpie libre standard de réaction, on a

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ = -RT \ln K^\circ$$

soit

$$\ln K^\circ = \frac{\Delta_r S^\circ}{R} - \frac{\Delta_r H^\circ}{R} \frac{1}{T} = \ln(10) \log K^\circ$$

Comme $\Delta_r H^\circ$ et $\Delta_r S^\circ$ ne dépendent pas de la température dans le domaine étudié, on a bien l'équation d'une droite. La pente sur la figure 4 étant négative, on peut conclure que $\Delta_r H^\circ > 0$: la réaction est **endothermique**.

On lit graphiquement une pente pour $\log K^\circ = f(1/T)$ voisine de

$$p \approx \frac{-9,7 - (-0,3)}{(2,5 - 1,0) \cdot 10^{-3}} \approx -\frac{9,4}{1,5 \cdot 10^{-3}} = -6,27 \cdot 10^3$$

d'où

$$-\frac{\Delta_r H^\circ}{R \ln 10} = p \approx -6,27 \cdot 10^3$$

AN:

$$\Delta_r H^\circ \approx 6,27 \cdot 10^3 \times 8,31 \ln 10 \approx 120 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Mines Physique 1 MP 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (professeur en CPGE) ; il a été relu par Émilie Frémont (professeur en CPGE) et Louis Salkin (professeur en CPGE).

Ce sujet porte sur l'expérience historique de Jean Perrin, qui montre l'existence de constituants discrets dans la matière. Il s'agissait de la première confirmation expérimentale de l'existence de « grains indivisibles », les atomes. L'interprétation des observations fait intervenir le mouvement brownien.

- Dans la première partie, on considère le modèle du gaz parfait dont on rappelle quelques propriétés (définition, équation d'état, validité). La loi de la statique des fluides est établie. Elle permet d'analyser l'évolution de la pression au sein du gaz, qui est comparée à celle obtenue pour une phase condensée incompressible indilatable. Cette loi d'évolution est reliée au facteur de Boltzmann, puis à la concentration molaire du gaz.
- La partie II s'intéresse à la répartition verticale de grains d'une résine, appelée gomme-gutte, lorsqu'ils sont abandonnés dans l'eau. On commence par modéliser leur chute sous l'effet de la pesanteur, la poussée d'Archimède et un frottement fluide. À l'aide du facteur de Boltzmann, on explique pourquoi tous les grains ne sont pas accumulés au fond du récipient en régime stationnaire, contrairement à ce que prédit le modèle. L'analyse de la répartition verticale des grains permet une première estimation de la constante de Boltzmann.
- La troisième partie revisite l'expérience précédente en s'intéressant au comportement de chaque grain en régime « indépendant du temps ». On observe que chacun est en réalité animé d'un mouvement erratique. Un modèle, proposé par Langevin, est introduit. Il permet d'estimer l'extension typique du domaine de l'espace visité par un grain pendant une durée d'observation donnée. L'exploitation de résultats expérimentaux permet d'en déduire une seconde estimation de la constante de Boltzmann.
- Dans la partie IV, on étudie le dispositif optique utilisé par Jean Perrin pour réaliser ces observations : un microscope. Après un début assez classique (rappel des conditions de Gauss, tracé de rayons lumineux), on exploite une relation de conjugaison pour déterminer si le microscope utilisé permet l'observation des grains de gomme-gutte.

Mêlant questions de cours, questions plus calculatoires, exploitations graphiques, cet énoncé présente une structure typique des épreuves des Mines. Il fait intervenir des méthodes introduites au cours des deux années de classe préparatoire et constitue un excellent sujet d'entraînement.

INDICATIONS

Partie I

- 4 Appliquer le théorème de la résultante dynamique à la tranche de gaz située entre les altitudes z et $z + dz$. Après un développement limité à l'ordre 1 en dz , éliminer ρ au profit de P à l'aide de la loi des gaz parfaits.
- 5 Pour calculer ΔP dans le cas du gaz, remarquer que la hauteur du récipient peut être supposée petite devant quelques kilomètres, ce qui autorise à développer l'exponentielle. Pour l'eau liquide, revenir à l'équation de la statique des fluides et conserver μ_e , que l'on peut supposer indépendante de z , dans le cadre du modèle de la phase condensée incompressible indilatable.

Partie II

- 10 En régime indépendant du temps, les deux vecteurs densité de flux doivent se compenser en chaque point.

12 Par définition,

$$N = S \int_0^\infty c(z) dz$$

- 13 À l'échelle de l'épaisseur e d'une tranche, c peut être supposée uniforme.
- 14 Pour identifier les causes d'incertitude, il faut prendre le temps de questionner les hypothèses du modèle et visualiser le dispositif expérimental (dimensions de la cuve, propriétés des grains, protocole de mesure). Jean Perrin utilise un microscope dont la profondeur de champ est e . Il fait la mise au point sur la tranche située à l'altitude z et compte les grains qu'il y « voit ». Le comptage est réitéré de nombreuses fois pour chaque tranche.

Partie III

- 15 Utiliser l'estimation de τ réalisée à la question 9 pour justifier que le « mouvement s'atténue très vite ».
- 17 Le modèle proposé est unidirectionnel. L'énergie de la particule se réduit à son énergie cinétique de translation sur un axe.
- 18 Multiplier scalairement (E_L) par \vec{x} . Prendre la valeur moyenne de l'expression obtenue. Utiliser les propriétés de F_c et φ , ainsi que la relation établie à la question 16.

19 Remarquer que

$$xv = x \frac{dx}{dt}$$

- 20 La question précédente a permis de montrer que

$$\langle x^2 \rangle \simeq \frac{2k_B T_0}{\alpha} t$$

L'exploitation de la pente de la figure 2 permet d'estimer k_B .

Partie IV

- 22 Ne pas placer L_2 au début de la construction. Placer la lentille L_1 , les points F_1 et F'_1 , puis l'objet AB proche du plan focal objet de L_1 . Tracer la marche des deux rayons particuliers imposés par l'énoncé. Placer alors F_2 , puis L_2 .
- 23 La relation de conjugaison de Newton est la plus rapide.
- 24 Construire la marche du rayon issu de B et passant par F_1 . Le théorème de Thalès et l'équivalent $\tan x \sim x$ dans l'approximation de Gauss permettent de conclure. Utiliser le pouvoir de résolution angulaire de l'œil $\simeq 10^{-4}$ rad (à connaître).

JEAN PERRIN ET L'HYPOTHÈSE ATOMIQUE

I. ÉQUILIBRE VERTICAL D'UN GAZ À LA TEMPÉRATURE AMBIANTE

1 Prenons $T_0 = 3,0 \cdot 10^2 \text{ K}$ et $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

D'après l'équation des gaz parfaits, $P_0 V = n R T_0$ d'où

$$\frac{V}{n} = \frac{R T_0}{P_0} = \frac{8,3 \times 3,0 \cdot 10^2}{1,0 \cdot 10^5} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$$

Chaque molécule, assimilée à une boule, occupe le volume

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi}{3} R_m^3$$

Le volume V du récipient contient $n N_A$ molécules. Le rapport entre le volume occupé par l'ensemble des sphères associées aux molécules et le volume du récipient s'écrit

$$\frac{\mathcal{V} n N_A}{V} = \frac{4\pi R_m^3 N_A}{3 V/n} \simeq \frac{4\pi \times (1 \cdot 10^{-10})^3 \times 6,0 \cdot 10^{23}}{3 \times 2,5 \cdot 10^{-2}} \simeq 1 \cdot 10^{-4}$$

2 Un gaz parfait est un gaz dont les **molécules** sont **ponctuelles** et dans lequel **seules les interactions de contact sont prises en compte** (pas d'interactions à distance).

D'autres définitions équivalentes peuvent être données :

- un gaz est parfait s'il vérifie les deux lois de Joule ;
- un gaz parfait est un gaz dont l'équation d'état est $PV = nRT$.

Ainsi, un gaz réel peut être assimilé à un gaz parfait si le volume occupé par l'ensemble des boules modélisant les molécules est petit en comparaison du volume du récipient. D'après la question précédente, dans l'expérience considérée, le rapport de ces deux volumes est de l'ordre de 10^{-4} , donc l'**approximation** est **justifiée**.

3 L'énergie cinétique d'une particule de vitesse v est

$$E_{\text{cm}} = \frac{1}{2} m_m v^2$$

Prenons la verticale ascendante. À une constante additive près, l'énergie potentielle de la particule dans le champ de pesanteur est

$$E_{\text{pm}} = m_m g z$$

D'après les lois de la mécanique, les particules du gaz devraient toutes tomber au fond du récipient. Il n'y aurait alors plus d'agitation des particules, ce qui correspondrait à une température nulle. **En thermalisant le gaz** à la température ambiante T_0 , les molécules de la paroi du récipient communiquent de l'énergie aux particules du gaz ce qui les **empêche de se regrouper au fond du récipient**.

4 Réécrivons la loi des gaz parfaits sous la forme

$$P = \rho \frac{RT_0}{M}$$

d'où

$$\rho = \frac{M}{RT_0} P \quad (1)$$

Par conséquent, si P dépend de z alors ρ dépend de z également.

Appliquons le théorème de la résultante dynamique à la tranche de gaz située entre les altitudes z et $z + dz$, de masse $\rho dzdS$, dans le référentiel du récipient supposé galiléen. Elle est soumise à son poids et aux forces pressantes s'exerçant sur sa paroi. À l'équilibre, en projection sur la verticale,

$$0 = -\rho(z) dzdS g + P(z)dS - P(z + dz)dS$$

Développons $P(z + dz)$ à l'ordre 1 en dz ,

$$0 = -\rho(z) dzdS g - \frac{dP}{dz}(z) dzdS$$

Injectons l'équation (1) pour éliminer ρ . Après simplification par $dzdS$, il vient

$$\frac{dP}{dz}(z) = -\frac{Mg}{RT_0} P(z)$$

5 Posons

$$H = \frac{RT_0}{Mg} = \frac{k_B T_0}{m_m g}$$

La pression P est solution de $\frac{dP}{dz}(z) + \frac{P(z)}{H} = 0$

que l'on intègre entre les altitudes 0 et z , pour obtenir

$$P(z) = P_0 e^{-z/H}$$

Ainsi

$$\frac{P(z)}{P_0} = A(z) \quad \text{avec} \quad H = \frac{8,3 \times 3,0 \cdot 10^2}{3,0 \cdot 10^{-2} \times 9,8} = 8 \text{ km}$$

Considérons un récipient de hauteur $h = 1,0$ m. Comme $h \ll H$, approximations la fonction A par son développement au voisinage de $z = 0$ soit

$$P(h) = P_0 \left(1 - \frac{h}{H} \right)$$

Posons $\Delta P = P(0) - P(h)$, alors

$$\Delta P = P_0 \frac{h}{H} = 1,0 \cdot 10^5 \times \frac{1,0}{8,10^3} \simeq 10 \text{ Pa}$$

Dans l'eau liquide, assimilée à une phase condensée incompressible indilatable, μ_e est indépendante de z , si bien que

$$\frac{dP}{dz} = -\mu_e g$$

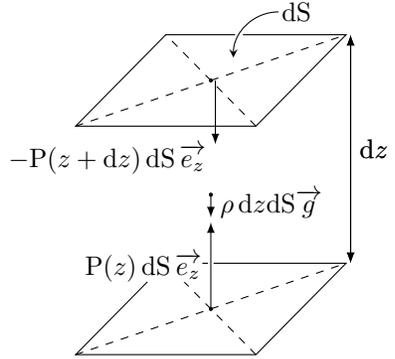
d'où

$$P(z) = -\mu_e g z + P_0$$

et

$$\Delta P = \mu_e g h = 1,0 \cdot 10^3 \times 10 \times 1,0 \simeq 10^4 \text{ Pa}$$

Dans les deux cas, les variations de pression sont **mesurables avec des manomètres courants au laboratoire.**



Mines Physique 2 MP 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Valentin Quintana Leyton (École Polytechnique) ; il a été relu par Steve Arneaux (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Les naines blanches sont la trace d'étoiles éteintes. On explique leur stabilité par un équilibre entre les contraintes gravitationnelles, relevant de l'infiniment grand, et les principes de la mécanique quantique, expliquant l'infiniment petit. Le développement au cours du XX^e siècle de la mécanique quantique ainsi que de la physique statistique a mis en défaut certains modèles physiques de l'époque, notamment celui de l'atome de Bohr. Néanmoins, il arrive qu'ils fournissent en pratique des résultats cohérents, ce qui apparaît dans le sujet. De plus, la mécanique quantique ne peut encore expliquer les phénomènes à grande échelle. Cette épreuve propose une étude d'une naine blanche à l'aide de la mécanique quantique et de la physique statistique.

- La partie I, assez courte, propose une étude énergétique à l'aide d'ordres de grandeur.
- La partie II se concentre sur l'étude du spectre d'une étoile. Elle en étudie toutes ses caractéristiques : les composantes continues relevant du rayonnement du corps noir, les composantes discrètes issues de transitions énergétiques expliquées par la mécanique quantique, ainsi que les sources de modifications du spectre.
- La partie III s'intéresse à une méthode d'estimation du rayon d'une naine blanche. Elle y parvient à l'aide d'un argument d'équilibre mécanique. Certaines formules sont fournies et il est demandé de les exploiter pour produire un raisonnement.
- La partie IV suppose que la structure atomique de l'étoile est cristalline. Elle se propose de vérifier la cohérence de cette hypothèse à l'aide d'un calcul d'amplitude d'agitation des atomes ; ce dernier fait appel à l'électrostatique ainsi qu'à la physique statistique.

Ce sujet très riche a tendance à dérouter car certaines questions sont peu guidées. Une connaissance très détaillée du cours aide grandement pour trouver les démarches à adopter.

INDICATIONS

Partie II

- 3 Calculer la longueur d'onde λ_n émise lorsque l'électron passe d'un état excité n à son état fondamental.
- 4 Calculer $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$: la suite des écarts est-elle monotone ?
- 5 Les atomes qui rayonnent ont des vitesses relatives différentes par rapport à un observateur sur Terre notamment à cause de l'agitation thermique. Exprimer alors la longueur d'onde observée et estimer l'élargissement $\delta\lambda$.
- 6 Le modèle de Bohr se base sur la mécanique classique. Il s'agit d'appliquer le principe fondamental de la dynamique ainsi que le théorème du moment cinétique.
- 7 Éliminer λ au profit de x .
- 8 Supposer que $x \gg 1$ et vérifier que l'hypothèse est bien cohérente.

Partie III

- 10 Comparer l'énergie d'agitation thermique à E_{i1} .
- 11 Relier le nombre d'atomes de carbone au nombre d'électrons dans l'étoile.
- 12 La dimension de \hbar est celle d'un moment cinétique.
- 14 Le travail des forces de pression gravitationnelle s'exprime de deux façons différentes : $\delta W_g = -P_g dV_\star = -dE_g$
- 15 Le 1,7 provient de la masse du proton.

Partie IV

- 16 L'étoile est ici une sphère de rayon R_\star , mais également la réunion de N_C noyaux occupant un volume a^3 .
- 18 Il faut choisir comme système le noyau de masse m_c et de charge $6e$: le mouvement se trouve être plan après avoir appliqué le théorème du moment cinétique.
- 20 Ne pas oublier de calculer la constante de normalisation.
- 21 On peut se passer de calculs de séries entières en reconnaissant la dérivée d'une certaine quantité par rapport à β .

1 Dans l'hypothèse où la naine blanche a une masse volumique uniforme, la masse du marteau s'écrit

$$m = \rho V_m = \frac{3 M_\star}{4\pi R_\star^3} V_m = \frac{3 \times 10^{30}}{4 \times 3 \times 1.10^{21}} \times 0,2^3 2,5.10^8 \times 8.10^{-3} = 2.10^6 \text{ kg}$$

2 On suppose que lorsque Thor assène un coup de marteau, son bras passe de la position verticale à une position horizontale. Thor ayant des proportions humaines, la variation de hauteur est ici de l'ordre de 1m. Exprimons la différence de potentiel :

$$\Delta E_p = mg\Delta z = 2.10^6 \times 10 \times (-1) = -2.10^7 \text{ J}$$

Cette perte d'énergie potentielle ΔE_p est a priori convertie en énergie cinétique ΔE_c , dissipée dans l'impact. Celle-ci est bien supérieure à l'énergie libérée par un bâton de dynamite : **Thor peut donc bien briser des rochers.**

3 L'énergie rayonnée par l'atome pour revenir de l'état excité n à l'état fondamental s'écrit en fonction de n

$$\Delta E(n) = E_0 \left[1 - \frac{1}{n^2} \right]$$

Cette énergie est portée par un photon de longueur d'onde λ , d'énergie

$$E_\lambda = \frac{hc}{\lambda}$$

Ainsi, les longueurs d'onde de transitions sont

$$\lambda_n = \frac{hc}{E_0} \frac{n^2}{n^2 - 1}$$

Puisque la suite $(n^2/(n^2-1))$ tend rapidement vers 1, on trouve alors que les longueurs d'ondes sont toutes de l'ordre de hc/E_0 , qui est évaluée à

$$\frac{hc}{E_0} = \frac{6.10^{-34} \times 3.10^8}{13,6 \times 1,6.10^{-19}} = \frac{20.10^{-26}}{10 \times 2.10^{-19}} = 1.10^{-7} \text{ m}$$

tout comme les raies de Lyman visibles sur la figure 2. En conclusion, il paraît cohérent d'affirmer que **les raies de Lyman sont dues au retour de l'électron dans son niveau fondamental.**

4 La quantification des états d'énergie impose une quantification des longueurs d'onde des photons émis, pour n entier naturel non nul,

$$\lambda_n = \frac{hc}{E_0} \left[1 + \frac{1}{n^2 - 1} \right]$$

Calculons $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$:

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{hc}{E_0} \left[\frac{1}{(n+1)^2 - 1} - \frac{1}{n^2 - 1} \right] = -\frac{hc}{E_0} \left(\frac{2n+1}{[n^2-1][n^2+2n]} \right)$$

En remarquant que la fraction rationnelle

$$t \mapsto \frac{2t+1}{[t^2-1][t^2+2t]}$$

décroit vers 0 sur $]1; +\infty[$, on en déduit que l'écart en valeur absolue entre deux raies de Lyman successives décroît. **Cela explique le resserrement des raies observé en figure 2.**

On peut d'ailleurs aller plus loin en effectuant un développement limité de l'écart pour trouver

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \simeq -\frac{hc}{E_0} \cdot \frac{2}{n^3}$$

Ainsi, la série de terme général $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ est convergente, ce qui indique l'existence d'une longueur d'onde de Lyman limite λ_{lim} correspondant à la transition énergétique où

$$E_{\lambda_{\text{lim}}} = E_0$$

5 Une explication plausible à cet élargissement est l'**effet Doppler** dû à l'agitation thermique ; les atomes d'hydrogène ayant différentes vitesses d'éloignement v_H relativement à un observateur sur Terre, la longueur d'onde sous laquelle il les perçoit varie. Pour un atome rayonnant une longueur d'onde λ , celle perçue λ_p vaut

$$\lambda_p = \lambda \left[1 + \frac{v_H}{c} \right]$$

Ainsi, la différence de longueur d'onde entre deux atomes d'hydrogène s'écrit

$$\delta\lambda = \lambda \frac{\delta v_H}{c}$$

En considérant deux atomes de même vitesse v^* , l'un s'éloignant et l'autre se rapprochant, on approche l'écart de vitesses par

$$\delta v_H = v_{H_1} - v_{H_2}$$

On choisit d'approcher ensuite $v_{H_1} = v^*$ et $v_{H_2} = -v^*$ dans le pire des cas où les atomes s'éloignent

$$\delta v_H = 2v^*$$

où v^* est la vitesse quadratique moyenne, que l'on sait relier à la température. En effet, pour un atome de gaz parfait monoatomique, l'énergie est uniquement d'origine cinétique avec trois degrés de liberté et sa moyenne s'écrit des deux façons suivantes :

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} m_p (v^*)^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

Finalement,

$$\frac{2}{c} \sqrt{\frac{3k_B T}{m_p}} = \frac{\delta\lambda}{\lambda}$$

L'élargissement naturel, conséquence des inégalités de Heisenberg, ne suffit pas pour expliquer un aussi grand écart type dans les longueurs d'ondes. En effet, pour la lumière visible, le décalage $\delta\lambda$ est de l'ordre de 10^{-13} m : il faut chercher la cause ailleurs.

L'agitation thermique n'est d'ailleurs pas la seule à engendrer l'effet Doppler : il faudrait normalement prendre en compte la rotation propre de la naine blanche. Néanmoins, cela ne semblait pas être l'objet de la question, car aucune donnée en ce sens n'était fournie.

Mines Chimie MP 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexandre Herault (professeur en CPGE) ; il a été relu par Augustin Long (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

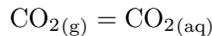
Ce sujet a pour thème l'élément strontium. Il est divisé en cinq parties dont les trois premières sont très courtes.

- La première partie traite de la structure électronique du strontium, que l'on détermine grâce à sa position dans la classification périodique.
- La deuxième partie aborde la structure cristalline du fluorure de strontium. Les notions classiques de population, neutralité, coordinence et contact mixte entre anions et cations sont utilisées.
- La troisième partie concerne la cinétique, d'ordre 1, de la radioactivité β^- du strontium. Signalons une erreur de rédaction à la question 8, qui la rend malheureusement incompréhensible, ce qui a pu gêner les candidats.
- La quatrième partie étudie la thermodynamique de la dissolution du carbonate de strontium, dans l'eau pure dans un premier temps, puis dans une eau en équilibre avec du dioxyde de carbone gazeux dans un second temps.
- Enfin, la cinquième et dernière partie s'intéresse à la réalisation d'une pile à combustible. On utilise les demi-équations électroniques, les potentiels d'oxydo-réduction ainsi que les courbes courant-potentiel, en tenant compte des surtensions.

Presque toutes les questions de ce sujet sont des applications immédiates du cours. Notons cependant que les applications numériques étaient cette année assez pénibles à réaliser sans calculatrice. La difficulté de cette épreuve réside dans son format particulier, si court qu'il est nécessaire de s'y préparer spécifiquement pour être efficace sur les questions simples le jour J. Ce sujet est un très bon entraînement, les thèmes abordés étant récurrents d'une année sur l'autre.

INDICATIONS

- 1 Compter les électrons de l'élément situé au-dessus du strontium pour déterminer son numéro atomique.
- 3 L'ion carbonate est CO_3^{2-} . Représenter tous les doublets d'électrons et les charges formelles.
- 4 Compter les anions et les cations. Le cristal doit être neutre.
- 5 La coordinence est le nombre de premiers voisins. Elle est ici différente pour les anions et les cations.
- 6 À quel endroit anions et cations sont-ils en contact dans la maille ?
- 7 La désintégration β^- produit un électron ${}_{-1}^0\text{e}^-$. Écrire l'équation de réaction en précisant les nombres de protons et de nucléons de chaque isotope.
- 8 La formulation de l'énoncé n'a pas de sens. Il faut lire « activité » et non pas « temps d'activité ». Quelle durée particulière s'est écoulée depuis l'accident ?
- 9 Intégrer la loi cinétique d'ordre 1 et trouver l'expression de l'activité en fonction du temps. On peut aussi remarquer que l'activité est divisée par 2 tous les 30 ans, et que $2^{10} \approx 10^3$.
- 13 Utiliser le signe de $\Delta_r H^\circ$ pour déterminer si $K^\circ(T)$ est une fonction croissante ou décroissante à l'aide de la relation de Van 't Hoff.
- 14 L'équilibre à considérer est la dissolution du gaz en solution :



- 15 Exprimer la nouvelle équation de réaction en fonction de la précédente et des réactions des acides pour faire apparaître K_{a1} et K_{a2} . Attention à la stœchiométrie de la réaction, qui forme deux ions HCO_3^- lorsque l'on écrit la relation à l'équilibre avec s' .
- 17 Il ne faut pas oublier le générateur pour réaliser un montage à trois électrodes.
- 18 Équilibrer en milieu basique avec des ions OH^- , puisque $\text{pH} = 14$.
- 19 Se servir du sens indiqué de circulation des électrons pour trouver l'anode et la cathode, puis utiliser les réactions déterminées à la question précédente pour attribuer les quatre espèces.
- 21 Il faut prendre en compte les surtensions et déterminer leurs signes. On réalise une pile, et non pas une électrolyse : les surtensions rapprochent les branches.
- 22 Il faut utiliser la charge totale et la quantité de matière d'électrons, que l'on relie à la quantité de dioxygène consommée grâce à la stœchiométrie de la réaction. Ne pas oublier le rendement de la pile.

AUTOUR DU STRONTIUM

1 Comme le strontium se situe sur la 5^e ligne et la 2^e colonne de la classification périodique, sa configuration électronique de valence est $5s^2$. D'après les règles de Klechkowski, Hund et Pauli, sa configuration électronique complète est

$$\text{Sr} : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2$$

En comptant les électrons, on trouve $Z = 38$, résultat confirmé par l'énoncé à la question 7 qui donne $A = 90$ et $N = 52$, soit $90 - 52 = 38$ protons.

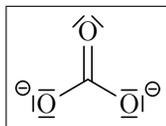
L'élément situé au-dessus du strontium a une configuration électronique de valence $4s^2$, ce qui donne la configuration électronique

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2$$

En comptant les électrons de cette configuration électronique, on trouve le numéro atomique $Z = 20$: il s'agit donc du calcium d'après les données de l'énoncé. Calcium et strontium ont ainsi **la même configuration électronique de valence**, et donc des propriétés chimiques similaires, ce qui explique que le strontium peut se substituer au calcium dans les os.

2 Le strontium ayant deux électrons de valence, il peut les perdre pour acquérir la structure électronique du **gaz noble** qui le précède dans la classification périodique, qui est une structure particulièrement stable. On trouve donc souvent les ions Sr^{2+} .

3 Un schéma de Lewis de l'ion carbonate CO_3^{2-} est



Les électrons sont en réalité délocalisés de sorte que les atomes d'oxygène sont tous équivalents dans l'ion carbonate.

4 Dans une structure cubique faces centrées (voir la représentation de la question suivante), la population d'une maille est

$$Z = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$$

Par ailleurs, il y a huit sites tétraédriques (aux centres des huit petits cubes d'arête $a/2$). Pour que le cristal de fluorure de strontium soit **électriquement neutre**, il est nécessaire d'avoir deux fois plus d'ions fluorure F^- que d'ions strontium Sr^{2+} , si bien que tous les sites tétraédriques doivent être occupés.

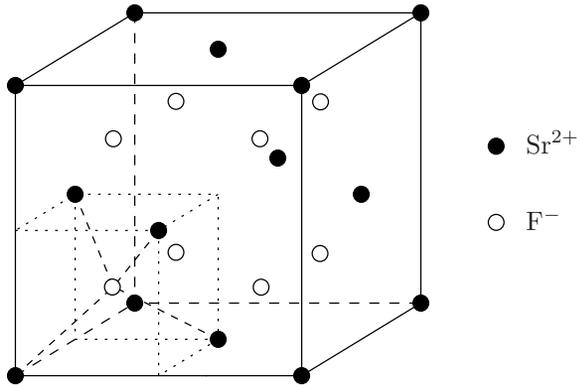
5 Les ions fluorure étant situés dans des sites tétraédriques, ils sont entourés de quatre ions strontium, leur coordinence est

$$\text{F}^- | \text{Sr}^{2+} = [4]$$

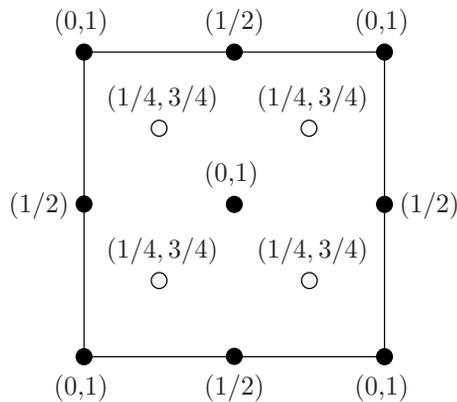
Si on considère un ion strontium au centre d'une face de la maille (voir le schéma de la page suivante), on constate qu'il est entouré de huit ions fluorure (quatre dans cette maille et quatre dans une maille voisine) si bien que la coordinence des cations est

$$\text{Sr}^{2+} | \text{F}^- = [8]$$

La structure de la maille est



La projection cotée évoquée dans l'énoncé serait



C'est une autre manière de représenter la maille. Il est conseillé de préférer la représentation en perspective, plus aisée à lire.

6 Le contact entre anions et cations se fait sur le quart de la diagonale de la maille :

$$\frac{a\sqrt{3}}{4} = R + r$$

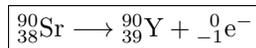
soit

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{4} - R$$

AN:

$$r = \frac{576 \times 7}{16} - 132 = 36 \times 7 - 132 = 120 \text{ pm}$$

7 La réaction de désintégration β^- produit un électron (noté ${}^0_{-1}e^-$) :



On peut aussi ajouter dans l'équation la production d'un anti-neutrino ${}^0_0\bar{\nu}$ pour plus de précision.

8 La formulation de l'énoncé n'est pas adaptée. Le terme « temps d'activité » n'a pas de sens physique. Il faut corriger en « activité », qui est le nombre de désintégrations par seconde à une date donnée.

X/ENS Physique MP 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Thomas Dupic (ENS Ulm) ; il a été relu par Virgile Andreani (ENS Ulm) et Émilie Frémont (professeur en CPGE).

Le sujet explore plusieurs propriétés thermodynamiques de l'atmosphère et propose une description de certains mécanismes météorologiques majeurs : la formation des nuages et des précipitations, la circulation atmosphérique (à travers les cellules de Hadley) ou encore la puissance fournie par les vents. Les trois parties sont indépendantes.

- La partie 1, qui est la plus longue et la plus délicate, traite plusieurs modèles d'atmosphère en prenant en compte à la fois l'équilibre thermodynamique, le flux solaire et l'hydrologie. Elle contient plusieurs questions d'interprétation assez délicate ainsi que de nombreuses applications numériques (sans calculatrice).
- La partie suivante aborde la puissance éolienne générée par l'atmosphère. En pratique, il s'agit d'un exercice assez standard sur un modèle de machine thermique relié un peu artificiellement au sujet principal dans les dernières questions.
- La partie 3 concerne la formation de gouttes d'eau au sein des nuages ainsi que le rôle des aérosols. Elle est plus calculatoire que les parties précédentes.

Intégralement consacré à la thermodynamique, le sujet couvre tout le programme de MPSI dans ce domaine. Il est d'ailleurs abordable en fin de première année et n'est pas trop calculatoire. Il ne faudrait pas en conclure pour autant qu'il s'agit d'un sujet facile, car il demande une compréhension approfondie de la thermodynamique pour être réussi. Cela en fait un excellent sujet de révision pour cette partie du programme parfois délaissée à l'approche des concours.

INDICATIONS

Partie 1

- 3 L'azote et l'oxygène sont présents dans l'air sous forme diatomique.
- 4 La densité de l'air dépend elle aussi de l'altitude, de sorte qu'il faut trois équations pour résoudre le système, la condition d'équilibre hydrostatique, la loi des gaz parfaits et la relation d'isentropie.
- 5 Pour un gaz parfait diatomique, l'indice adiabatique γ vaut $7/5$. Attention à convertir toutes les données en unités SI.
- 6 Exploiter la loi de Laplace.
- 11 Exploiter l'égalité entre la pression partielle de la vapeur et la pression de vapeur saturante. Attention à ne pas oublier que cette dernière dépend de la température.
- 13 Faire le bilan entropique infinitésimal de la parcelle en différenciant l'entropie de l'air et celles des deux phases de l'eau.
- 14 Intégrer la relation trouvée à la question 13 entre $z = 0$ et $z = h$.
- 18 Le potentiel thermodynamique G vérifie $dG = 0$ à l'équilibre.
- 19 La variation d'entropie lors du changement d'état entre phase liquide et vapeur est égale à $\Delta_{\text{vap}}H/T$. On peut faire un développement limité, pour dT petit, de $G_m(T + dT, P_{\text{sat}}(T + dT))$.
- 20 Utiliser la méthode de séparation des variables pour résoudre l'équation différentielle.

Partie 2

- 22 Le rendement d'un moteur est égal à la quantité de travail fournie divisée par le transfert thermique total depuis la source chaude.
- 25 On peut appliquer le premier principe de la thermodynamique à un cycle de moteur.
- 26 Le second principe de la thermodynamique est cette fois approprié.
- 28 Il faut s'aider de la question 26, plutôt que de la question 23.
- 31 Le système judicieusement choisi est formé par \mathcal{F} auquel on adjoint les deux résistances thermiques. Les thermostats seuls ne créent pas d'entropie pendant leur fonctionnement.
- 32 La puissance du moteur correspond à l'énergie cédée au vent par unité de temps, la puissance totale reçue est égale à l'intensité totale du rayonnement solaire qui touche la Terre.

Partie 3

- 34 Pour prouver l'égalité des potentiels chimiques on se place dans un système à l'équilibre, ne contenant que de l'eau à l'état liquide et à l'état vapeur.
- 36 La quantité de matière n_ℓ contenue dans une goutte d'eau liquide est proportionnelle à son volume.
- 38 Le rayon critique correspond au maximum de $r \mapsto G(r)$.
- 40 La loi d'Arrhenius indique que si une réaction a une énergie d'activation E , sa constante de vitesse k est proportionnelle à $\exp(-E/k_B T)$.

THERMODYNAMIQUE DE L'ATMOSPHERE

1. STRUCTURE VERTICALE DE L'ATMOSPHERE

1 À l'équilibre, le flux incident (solaire) et le flux émis par la Terre sont égaux,

$$\Phi_{\text{émis}} = \Phi_{\text{reçu}} = I$$

donc, d'après la loi de Stefan, $I = sT_0^4$

d'où une température

$$T_0 = \sqrt[4]{\frac{I}{s}} = \sqrt[4]{\frac{220}{5,67 \times 10^{-8}}} = \sqrt[4]{\frac{220}{5,67}} \times 10^2 \approx 2,5 \cdot 10^2 \text{ K}$$

Selon ce modèle, la température à la surface de la Terre vaudrait à peu près -23°C , ce qui est beaucoup plus bas que les températures réellement observées.

2 Dans cette nouvelle situation, la Terre est toujours à l'équilibre, mais elle reçoit cette fois un flux supplémentaire, provenant de l'atmosphère,

$$sT_0^4 = I + sT_a^4$$

L'atmosphère est à l'équilibre elle aussi, et émet un flux sT_a^4 vers le haut et vers le bas. Elle reçoit un flux sT_0^4 de la Terre, mais comme elle est transparente au rayonnement solaire incident, le bilan ne contient pas de contribution du flux solaire,

$$sT_a^4 + sT_a^4 = sT_0^4$$

donc

$$T_0^4 = 2T_a^4$$

Remplaçons T_0 dans la première expression,

$$2sT_a^4 = I + sT_a^4$$

Ainsi la température de l'atmosphère dans cette modélisation est égale à la température de la planète obtenue à la question précédente,

$$T_a = \sqrt[4]{\frac{I}{s}} = 2,5 \cdot 10^2 \text{ K}$$

Et la température de la surface devient (en utilisant encore une fois l'annexe calculatoire de l'énoncé)

$$T_0 = \sqrt[4]{2} T_a = 1,2 \times 250 = 3,0 \cdot 10^2 \text{ K}$$

On trouve une température de 27°C , bien plus proche de la température moyenne de la Terre. La présence d'une atmosphère modifie l'équilibre thermique et réchauffe la surface, ce processus s'appelle **l'effet de serre**.

3 Les deux composants principaux de l'atmosphère sont **l'azote et l'oxygène** (tous deux dans leur forme diatomique, O_2 et N_2). **L'azote représente un peu moins de 80 % de l'atmosphère et l'oxygène 20 %**. La masse molaire moyenne de l'air est donc donnée par

$$M = 2 \times (0,8 M_N + 0,2 M_O) = 2 \times (0,8 \times 14 + 0,2 \times 16) \approx 29 \text{ g.mol}^{-1}$$

4] Considérons une parcelle d'atmosphère de hauteur infinitésimale dz , de surface (horizontale) A et donc de volume total $dV = A dz$. Lorsque cette parcelle est à l'équilibre, son poids est compensé par les forces de pression qui s'exercent sur ses faces. Ce sont les seules forces qui s'exercent sur la parcelle, et on peut projeter le principe fondamental de la dynamique (à l'équilibre) suivant \vec{e}_z orienté selon la verticale ascendante,

$$-AP(z + dz) dz + AP(z) dz - \rho(z) g dV = 0$$

où $\rho(z)$ désigne la densité volumique de l'air à l'altitude z . Avec un développement limité à l'ordre un, il vient

$$\frac{dP}{dz}(z) = -g \rho(z)$$

Comme l'atmosphère est modélisée par un gaz parfait, on peut aussi appliquer la loi des gaz parfaits à la parcelle. En remarquant que le nombre de moles d'air dans la parcelle est donné par $dn = \rho(z)/M \times dV$, on obtient

$$P(z) = \frac{dn RT(z)}{dV} = \frac{R}{M} \rho(z) T(z)$$

En combinant les deux équations précédentes,

$$\frac{1}{P(z)} \frac{dP}{dz}(z) = -\frac{Mg}{RT(z)}$$

Il manque une équation pour résoudre le système. L'énoncé précise qu'on se place dans le modèle isentropique, l'entropie S de la parcelle étudiée ne dépend donc pas de l'altitude.

$$0 = \frac{dS}{dz} = n C_p \frac{d \ln \left(TP^{\frac{1}{\gamma}-1} \right)}{dz}$$

ce qui se réécrit

$$0 = \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{1}{P} \frac{dP}{dz}$$

Finalement, en reprenant l'équation de l'équilibre hydrostatique,

$$-\frac{Mg}{RT(z)} = \frac{1}{P(z)} \frac{dP}{dz}(z) = -\left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right)^{-1} \frac{1}{T(z)} \frac{dT}{dz}(z)$$

Il est possible de simplifier cette équation différentielle en utilisant la relation de Mayer pour un gaz parfait,

$$R = C_p - C_v = C_p \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right)$$

On trouve

$$\frac{dT}{dz}(z) = -\frac{Mg}{C_p}$$

La solution de cette équation différentielle linéaire est donnée par

$$T(z) = T_0 - \frac{Mg}{C_p} z$$

X Physique et Sciences de l'ingénieur MP 2021

Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jérôme Lambert (enseignant-chercheur à l'université); il a été relu par Olivier Frantz (professeur agrégé en école d'ingénieurs) et Cyril Ravat (professeur en CPGE).

Ce problème est consacré à l'étude de l'effet piézo-électrique et de deux de ses applications.

- Dans la partie 1, on construit un modèle de matériau piézo-électrique à une dimension et l'on caractérise ses propriétés électrostatiques et mécaniques ainsi que leur couplage. On propose ensuite une version simplifiée de ces propriétés en régime oscillant.
- La deuxième partie est consacrée à l'étude des applications de l'effet piézo-électrique pour la transformation de tension, d'abord dans un cadre très général, puis dans le cadre d'un dispositif d'alimentation de lampe fluorescente à cathode froide.
- La partie 3 propose d'étudier une boucle électronique permettant de réaliser un oscillateur à quartz et de discuter des mérites de l'emploi de ce quartz par rapport à une bobine.

Le cœur du modèle constitue la partie 1, qui est beaucoup plus longue que les deux autres car son approche est très progressive. La troisième partie est plus courte et très largement indépendante des deux autres.

Ce problème très intéressant permet d'aborder une grande variété de thèmes et de méthodes au programme de MP, mais il aborde aussi un domaine totalement hors programme : les transformateurs. Ils sont introduits pas à pas. C'est là une manière de tester la capacité des candidats à s'approprier rapidement des concepts nouveaux. Cela rajoutait de la difficulté au sujet, qui est très long et comporte plusieurs questions difficiles.

INDICATIONS

Partie 1

- 2 Faire le bilan des forces sur les points P, N et B, tous les trois à l'équilibre, pour compléter le jeu d'équations sur x_P , x_N et x_B .
- 4 La force et la déformation sont uniformément réparties parmi les cellules.
- 6 On peut essayer de déterminer la distance pour laquelle l'allongement correspondrait à une distance particulière.
- 7 Quelle est la relation entre Δ_r et $\frac{\partial u}{\partial x}$?
- 9 Appliquer le théorème de Gauss à un petit cylindre comprenant l'interface entre l'élément piézo-électrique et l'électrode en $x = L$.
- 12 Faire un bilan des forces sur un petit volume, en faisant attention au sens des forces.
- 15 Que se passe-t-il si ω a une partie imaginaire ?
- 19 On cherche une équation reliant $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$.
- 21 Graphiquement, on peut remarquer que les intersections de la courbe $\cot(\theta)$ avec la droite $\mu\theta$ sont souvent proches des asymptotes verticales.
- 23 L'énergie cinétique de \mathcal{S} est la somme des énergies de chaque tranche élémentaire de largeur dx .
- 24 L'énergie potentielle de chaque tranche élémentaire est obtenue en sommant le travail de la contrainte extérieure menant d'une elongation nulle à une elongation totale $u(x + dx) - u(x)$.
- 25 Pas besoin de calculs supplémentaires pour définir la pulsation propre d'un oscillateur harmonique équivalent.
- 26 Attention à la projection des forces sur \vec{e}_x .
- 28 Le schéma du transformateur correspond simplement à la proportionnalité des tensions de part et d'autre du quadripôle, sans autre relation électrique.

Partie 2

- 30 La figure de droite permet de lire les parties réelle et imaginaire de $Y_1(\omega_s)$.
- 32 Si l'expression de R_s se simplifie, celle de C_s aussi.

Partie 3

- 38 On doit supposer qu'aucun courant ne sort en C.
- 41 Analyser les parties réelle et imaginaire de l'expression obtenue à la question 40. Déterminer la valeur de I pour expliquer l'absence de R dans ces relations.
- 44 La condition 19, en imposant le signe de S_2 , définit une plage de pulsations possibles.

L'EFFET PIÉZO-ÉLECTRIQUE ET DEUX DE SES APPLICATIONS

1. ÉTUDE DU COMPORTEMENT D'UN MILIEU PIÉZO-ÉLECTRIQUE

1 Les ressorts modélisent les forces de rappel vers la position d'équilibre. Ces forces ont pour origine la déformation des liaisons chimiques ainsi que les interactions stériques (non-interpénétrabilité des ions) et électriques. Du fait de la répartition des charges et de l'énormité des champs électriques en présence, les forces de rappel peuvent être linéarisées et modélisées par des ressorts si les déplacements caractérisés par x_B sont de faible amplitude par rapport à la taille caractéristique des ions, qui est comparable à $2a$, donc si

$$x_B \ll 2a$$

Le facteur 2 n'est pas très important dans cette inégalité mais on choisit de le conserver car il se rapporte à la taille de la maille cristalline.

2 Effectuons un bilan des forces appliquées sur P, le barycentre des charges positives dans le modèle de la figure 2. Ces forces sont :

- la force de rappel du ressort K_1 : $-K_1 x_P \vec{e}_x$;
- la force de rappel du ressort K_2 : $K_2 (x_B - x_P) \vec{e}_x$;
- la force électrique sur la charge $+q$ portée par P : $q \vec{E}$.

Il est important de ne pas se tromper dans l'orientation des forces de rappel des ressorts. Le plus simple est de faire varier tour à tour chaque paramètre de position et de vérifier l'orientation de la force de rappel qui découle de cette variation.

Dans le référentiel supposé galiléen du laboratoire, appliquons ensuite le Principe Fondamental de la Statique (PFS) à P considéré comme étant à l'équilibre :

$$m_P \ddot{x}_P \vec{e}_x = -K_1 x_P \vec{e}_x + K_2 (x_B - x_P) \vec{e}_x + q \vec{E} = \vec{0}$$

Projetons cette relation sur \vec{e}_x pour obtenir :

$$-K_1 x_P + K_2 (x_B - x_P) + qE = 0$$

Cette relation permet d'exprimer x_P en fonction de x_B et de E :

$$x_P = \frac{K_2}{K_1 + K_2} x_B + \frac{qE}{K_1 + K_2}$$

Considérer le cas du barycentre des charges négatives revient à substituer x_N à x_P , à permuter K_1 et K_2 et à changer q en $-q$. Dès lors l'équation précédente devient :

$$x_N = \frac{K_1}{K_1 + K_2} x_B - \frac{qE}{K_1 + K_2}$$

Considérons le point B en bout de maille et analysons son équilibre. Les forces exercées sur B sont :

- la force de rappel du ressort K_2 lié à P : $-K_2 (x_B - x_P) \vec{e}_x$;
- la force de rappel du ressort K_1 lié à N : $-K_1 (x_B - x_N) \vec{e}_x$;
- la force extérieure $\vec{f} = f \vec{e}_x$.

Le PFS appliqué à B donne alors, après projection sur \vec{e}_x ,

$$-K_2(x_B - x_P) - K_1(x_B - x_N) + f = 0$$

Isolons f et substituons à x_P et x_N leurs expressions en fonction de x_B et qE :

$$f = K_2(x_B - x_P) + K_1(x_B - x_N)$$

$$\text{soit } f = K_2 x_B - \frac{K_2^2}{K_1 + K_2} x_B - \frac{K_2 qE}{K_1 + K_2} + K_1 x_B - \frac{K_1^2}{K_1 + K_2} x_B + \frac{K_1 qE}{K_1 + K_2}$$

si bien que

$$f = \frac{2K_1 K_2}{K_1 + K_2} x_B + \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right) qE$$

Le premier terme du membre de droite correspond au double de l'association en série de K_1 et K_2 , c'est-à-dire à l'association en parallèle des ressorts liés à N et P.

La deuxième composante correspond à l'influence de \vec{E} , nulle si $K_1 = K_2$ car, dans ce cas, l'action du champ sur P est exactement compensée par son action sur N.

3 Appuyons nous sur les expressions de x_P et x_N en fonction de x_B et de qE obtenues à la question précédente pour calculer p :

$$p = q(x_P - x_N)$$

$$\text{soit } p = q \left[\left(\frac{K_2}{K_1 + K_2} x_B + \frac{qE}{K_1 + K_2} \right) - \left(\frac{K_1}{K_1 + K_2} x_B - \frac{qE}{K_1 + K_2} \right) \right]$$

qui conduit à

$$p = \frac{2q^2 E}{K_1 + K_2} + q \left(\frac{K_2 - K_1}{K_1 + K_2} \right) x_B$$

Le deuxième terme du second membre est remarquable : une déformation de la cellule engendre un moment dipolaire si $K_1 \neq K_2$, c'est-à-dire si la symétrie $x \rightarrow -x$ n'est pas respectée. Cette propriété s'étend à trois dimensions : un cristal ne peut pas être piézo-électrique s'il possède un centre d'inversion.

4 Toutes les mailles sont identiques donc la force \vec{F} se répartit de manière homogène sur $N_2 \times N_3$ colonnes. La force de traction sur chaque colonne est alors

$$f_{23} = \frac{F}{N_2 N_3}$$

À l'équilibre cette force s'exerce sur chaque maille de la colonne. Dès lors

$$f = f_{23} = \frac{F}{N_2 N_3}$$

En outre, chaque maille d'une colonne est soumise au même champ et à la même force de traction, donc l'élongation totale Δ est également distribuée sur chaque maille, de sorte que

$$x_{i+1} - x_i = x_B = \frac{\Delta}{N_1}$$