



JEAN-ÉTIENNE ROMBALDI

Mathématiques pour l'agrégation

Analyse et probabilités

**[AGRÉGATION
INTERNE ET EXTERNE
MATHÉMATIQUES]**

- Éléments de cours
- Applications transversales
- Près de 200 exercices corrigés



JEAN-ÉTIENNE ROMBALDI

Mathématiques pour l'agrégation

Analyse
et probabilités

deboeck **B**
SUPÉRIEUR



Chez le même éditeur (extrait du catalogue)

Agrégation de mathématiques :

ROMBALDI J.-É., *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie* – 2^e édition

ROMBALDI J.-É., *Exercices et problèmes corrigés pour l'agrégation de mathématiques*

ROMBALDI J.-É., *Leçons d'oral pour l'agrégation de mathématiques. Première épreuve : les exposés*

ROMBALDI J.-É., *Leçons d'oral pour l'agrégation de mathématiques. Seconde épreuve : les exercices*

Capes de mathématiques :

DARRACQ M.-C. & ROMBALDI J.-É., *Mathématiques pour le Capes. Analyse*

DARRACQ M.-C. & ROMBALDI J.-É., *Mathématiques pour le Capes. Algèbre et géométrie* (nouveau 2021)

DARRACQ M.-C. & ROMBALDI J.-É., *Mathématiques pour le Capes. Probabilités* (nouveau 2021)

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web :

www.deboecksuperieur.com



En couverture : Coupe d'un nautilaire © AdrianHancu/Istockphoto

Maquette intérieure : Hervé Souillard/Nexeme

Mise en pages de l'auteur

Maquette de couverture : Primo&Primo

Couverture : SCM, Toulouse

Dépôt légal :

Bibliothèque royale de Belgique : 2023/13647/006

Bibliothèque nationale, Paris : avril 2023

ISBN : 978-2-8073-4923-0

Tous droits réservés pour tous pays.

Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme ou de quelque manière que ce soit.

© De Boeck Supérieur SA, 2023 - Rue du Bosquet 7, B1348 Louvain-la-Neuve

De Boeck Supérieur - 5 allée de la 2^e DB, 75015 Paris



Table des matières

Avant-propos	VII
1 Le corps des nombres réels	1
1.1 Corps totalement ordonnés	1
1.2 Minorants et majorants dans un corps totalement ordonné	6
1.3 Suites à valeurs dans un corps totalement ordonné	8
1.4 Corps totalement ordonnés archimédiens	14
1.5 Une construction du corps des réels	20
1.6 Le corps totalement ordonné $\mathbb{R}$	21
1.7 Unicité du corps des réels	26
1.8 Exercices	27
2 Espaces métriques	31
2.1 Distances, espaces métriques et topologie	31
2.2 Suites à valeurs dans un espace métrique	39
2.3 Compacité	43
2.4 Le théorème de Baire	49
2.5 Limites réelles supérieure et inférieure	52
2.6 Limites et continuité des fonctions	54
2.7 Continuité et compacité	61
2.8 Un théorème de point fixe	67
2.9 Continuité et connexité	70
2.10 Espaces topologiques	71
2.11 Exercices	76
3 Espaces vectoriels normés	83
3.1 Semi-normes et normes	83
3.2 Suites dans un espace vectoriel normé	87
3.3 Continuité dans les espaces normés	90
3.4 Espaces vectoriels normés de dimension finie	101
3.5 Opérateurs compacts	105
3.6 Sous-groupes additifs d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie	108
3.7 Exercices	120

4	Séries dans un espace vectoriel normé	135
4.1	Séries à termes réels positifs	137
4.2	Convergence normale et commutative	149
4.3	La transformation d'Abel	155
4.4	Produit de Cauchy de deux séries	159
4.5	Séries doubles dans un espace de Banach	165
4.6	Les espaces ℓ^p pour $1 \leq p \leq +\infty$	170
4.7	Moyennes de Toeplitz, Cesàro et Euler	173
4.8	Produits infinis sur $\mathbb{C}$	192
4.9	Développement en produit infini de $\frac{\sin(z)}{z}$	201
4.10	Exercices	204
5	Suites et séries de fonctions	237
5.1	Suites de fonctions	237
5.2	Le théorème de Stone-Weierstrass	247
5.3	Séries de fonctions	250
5.4	La fonction exponentielle sur une algèbre de Banach	255
5.5	Le nombre π	267
5.6	Les fonctions tan et arctan	271
5.7	Les fonctions argument principal et logarithme	272
5.8	Exercices	274
6	Fonctions d'une variable réelle	281
6.1	Limites et continuité	281
6.2	Fonctions continues sur un segment	285
6.3	Prépondérance, domination et équivalence	288
6.4	Le théorème des valeurs intermédiaires	294
6.5	Fonctions monotones	297
6.6	Fonctions réglées	305
6.7	Dérivabilité	308
6.8	Théorèmes de Rolle, des accroissements finis et de Taylor-Lagrange	316
6.9	Inégalités de Kolmogorov	327
6.10	Développements limités et asymptotiques	330
6.11	Suites et séries de fonctions dérivables	338
6.12	Primitives	340
6.13	Dérivée logarithmique	341
6.14	Fonctions convexes	343
6.15	Exercices	353
7	Séries entières	371
7.1	Rayon de convergence d'une série entière	371
7.2	Opérations sur les séries entières	381
7.3	Étude au bord du disque de convergence	384
7.4	Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques	387
7.5	Fonctions analytiques de la variable réelle	393
7.6	Exercices	403

8	Intégrale de Riemann	413
8.1	Intégrale de Riemann des fonctions réglées	413
8.2	Fonctions Riemann-intégrables sur un segment	423
8.3	Intégrale de Riemann et primitives	439
8.4	Formules de la moyenne	442
8.5	Sommes de Riemann	445
8.6	Approximation des fonctions intégrables par des fonctions continues	449
8.7	Suites et séries de fonctions Riemann-intégrables	453
8.8	Intégrales dépendant d'un paramètre	461
8.9	Intégrales de Wallis	466
8.10	Formule de Stirling	470
8.11	Polynômes de Bernoulli, formules de Stirling et d'Euler-Maclaurin	473
8.12	Exercices	480
9	Intégrales impropres	499
9.1	Convergence d'une intégrale impropre	499
9.2	Opérations sur les intégrales généralisées	504
9.3	Intégrales impropres des fonctions à valeurs positives	507
9.4	Un théorème d'Abel	512
9.5	Un théorème de convergence dominée	513
9.6	Comparaison d'une série et d'une intégrale	519
9.7	Exercices	530
10	Intégrales impropres dépendant d'un paramètre	553
10.1	Continuité et dérivabilité d'une intégrale impropre dépendant d'un paramètre	553
10.2	Fonctions eulériennes gamma et bêta	555
10.3	Exercices	568
11	Série de Fourier d'une fonction périodique	575
11.1	Fonctions 2π -périodiques localement Riemann-intégrables	576
11.2	Séries trigonométriques	578
11.3	Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques	585
11.4	Le théorème de Parseval	588
11.5	Le théorème de Dirichlet	592
11.6	Exemples d'utilisation des séries de Fourier	597
11.7	Exercices	605
12	Espaces préhilbertiens réels	615
12.1	Produit scalaire	615
12.2	Orthogonalité	618
12.3	Projection orthogonale dans un espace préhilbertien	622
12.4	Inégalité de Bessel et égalité de Parseval	624
12.5	Déterminants de Gram	628
12.6	Les théorèmes de Müntz	632
12.7	Exercices	638

13 Polynômes orthogonaux	647
13.1 Polynômes orthogonaux associés à une forme linéaire	647
13.2 Polynômes orthogonaux associés à une fonction poids	660
13.3 Polynômes orthogonaux classiques, formules de Rodrigues	661
13.4 Les polynômes de Legendre	672
13.5 Développement en série de polynômes orthogonaux	679
13.6 Exercices	686
14 Variables aléatoires réelles discrètes	707
14.1 Rappels sur les espaces probabilisés	707
14.2 Définition et propriétés des variables aléatoires discrètes	713
14.3 Variables aléatoires discrètes indépendantes	722
14.4 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire discrète	726
14.5 Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète à valeurs entières	740
14.6 Exercices	746
15 Variables aléatoires réelles	751
15.1 Variables aléatoires réelles, fonction de répartition	751
15.2 Variables aléatoires réelles indépendantes	755
15.3 Espérance d'une variable aléatoire réelle	756
15.4 Variance, covariance et moments d'ordre r	763
15.5 Convergence en probabilité et loi faible des grands nombres	768
15.6 Variables aléatoires à densité	772
15.7 Variables aléatoires à densité classiques	777
15.8 Espérance des variables aléatoires à densité	784
15.9 Théorème de transfert et moments	787
15.10 Convergence en loi et théorème de la limite centrale	788
15.11 Exercices	792
Bibliographie	801
Index	803

Avant-propos

Ce cours est basé sur quelques parties communes des programmes d'analyse de l'agrégation interne et externe. Les parties de ces programmes non traitées dans ce volume le seront dans un deuxième volume destiné aux candidats à l'agrégation externe. Ce cours est l'occasion de réviser des notions de base pour l'écrit et les exercices proposés peuvent constituer un bon entraînement pour les épreuves écrites et être utilisés pour des développements dans les leçons d'oral.

Le premier chapitre est consacré à l'étude des corps ordonnés avec pour finalité une construction du corps des réels. Dans un premier temps on énonce un résultat qui nous donne une série d'équivalences pour qu'un corps de caractéristique différente de 2 soit totalement ordonné. On s'intéresse ensuite à l'étude des suites sur un tel corps avec les notions de suites convergentes, monotones, adjacentes, de Cauchy et on donne une série d'équivalences pour qu'un corps totalement ordonné soit archimédien. On donne également des équivalences relatives à l'existence de borne inférieure ou supérieure. Ces résultats permettent de mieux comprendre les propriétés du corps des réels une fois ce dernier construit. Cette construction est faite en fin de chapitre à partir des suites de Cauchy.

Les chapitres 2 et 3 sont consacrés aux propriétés topologiques des espaces métriques et normés. On y étudie les notions de boules, voisinages, ouverts, fermés, intérieur, adhérence, compacts, précompacts, relativement compacts et connexes. On s'intéresse également à l'étude des suites et des fonctions continues. Dans le cas des suites réelles, on s'intéresse aux notions de limites inférieure et supérieure. Les suites et les fonctions continues sur les compacts sont particulièrement étudiées avec entre autres le théorème de Baire, le théorème de Heine, la notion d'équicontinuité avec le théorème d'Ascoli et le théorème de point fixe de Picard. Dans le cas des espaces normés, on s'intéresse en particulier aux applications linéaires continues, à l'équivalence des normes en dimension finie, aux opérateurs compacts et aux sous-groupes additifs d'un espace vectoriel de dimension finie. L'étude des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ est appliquée à quelques résultats d'irrationalité et à l'étude du groupe des périodes d'une fonction.

L'étude des séries dans un espace normé est faite au chapitre 4. Ce chapitre se termine par des applications à l'étude des espaces ℓ^p , des moyennes de Cesàro, d'Euler, de Toeplitz et par celle des produits infinis de nombres complexes.

Les suites et séries de fonctions sont étudiées aux chapitres 5 et 7 avec les notions de convergences simple, uniforme et normale. On s'intéresse à la fonction exponentielle sur un espace de Banach. En se limitant au corps des nombres complexes, on donne une définition du nombre π et des fonctions argument principal et logarithme d'un nombre complexe. Dans le cas des suites de fonctions sur un compact, on dispose des théorèmes de Dini, de Stone-Weierstrass et de Weierstrass polynomiale et trigonométrique. Dans le cas des séries entières, on s'intéresse à l'étude au bord du disque de convergence et au cas particulier des fonctions analytiques réelles où l'on rencontre les théorèmes de Borel et de Bernstein.

Les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace normé sont étudiées au chapitre 6 : continuité, comparaison des fonctions, monotonie, fonctions réglées, dérivabilité, développements limités et asymptotiques, convexité. On com-

plète l'étude des suites et séries de fonctions d'une variable avec les théorèmes de permutations de limites.

Les chapitres 8, 9 et 10 sont consacrés à l'étude de l'intégrale de Riemann sur un segment et sur un intervalle réel borné ou non (intégrales impropres). L'intégrale des fonctions réglées sur un segment est définie à partir de l'intégration des fonctions en escalier par densité et prolongement d'une application uniformément continue. L'intégrale de Riemann sur un segment est définie dans un deuxième temps. On y démontre en particulier le critère d'intégrabilité de Lebesgue qui nous dit qu'une fonction est Riemann-intégrable sur un segment si, et seulement si, elle est bornée et l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable. On fait également le lien avec le problème de l'existence de primitives. On s'intéresse aussi à l'approximation des fonctions intégrables sur un segment par des fonctions continues. Pour ce qui est des suites et séries de fonctions, on s'intéresse aux problèmes de permutations des signes d'intégration et de passage à la limite ou de sommation (théorèmes de convergence monotone et dominée). On étudie bien entendu les intégrales dépendant d'un paramètre en s'intéressant en particulier aux fonctions eulériennes gamma et bêta. À titre d'applications, on s'intéresse aux intégrales de Wallis (classiques et généralisées), aux polynômes de Bernoulli et à la formule d'Euler-Maclaurin. L'étude des séries numériques est complétée en faisant la comparaison avec une intégrale impropre.

Le chapitre 11 est consacré aux séries de Fourier des fonctions périodique et localement Riemann-intégrable. On s'intéresse à l'approximation des fonctions continues 2π -périodiques par des polynômes trigonométriques. Le chapitre se termine par des applications : développement en produit infini de $\sin(x)$, calcul de $\zeta(2p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$, l'équation de la chaleur et l'équation des ondes.

L'étude des espaces normés est complétée par celle des espaces préhilbertiens au chapitre 12. Le théorème de projection orthogonale nous donne une autre présentation des séries de Fourier. On rencontre dans ce chapitre les théorèmes de Müntz qui permettent de caractériser les suites strictement croissantes de réels positifs pour lesquelles l'espace vectoriel $\text{Vect}\{x^{\lambda_n}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ pour les normes quadratique ou uniforme.

Au chapitre 13 on étudie les polynômes orthogonaux. La présentation de ces polynômes associés à une forme linéaire définie positive est inspirée du livre [5] de Theodore Chihara. Elle permet de justifier la présentation classique des polynômes de Legendre, Tchebychev, Laguerre et Hermite par des formules de Rodrigues. Les polynômes de Legendre sont étudiés de façon plus détaillée. Ce chapitre se termine par une introduction aux développements en série de polynômes orthogonaux avec des résultats analogues à ceux obtenus pour les séries de Fourier.

Enfin les deux derniers chapitres sont consacrés aux variables aléatoires discrètes et réelles, les notions de base sur les espaces probabilisés étant supposées acquises. La définition de l'espérance d'une variable aléatoire réelle en lien avec l'intégrale de Riemann des fonctions monotones est inspirée du livre [21] de Charles Suquet où cette étude est particulièrement détaillée. Ces chapitres peuvent être vus comme des applications des résultats sur les séries numériques, les séries entières et l'intégrale Riemann définie ou généralisée.

Pour conclure, je tiens à remercier les éditions De Boeck et en particulier Alain Luguët pour la confiance qu'ils m'accordent en publiant ce travail.

Chapitre 1

Le corps des nombres réels

On suppose connus l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs et le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

1.1 Corps totalement ordonnés

On rappelle qu'une *relation d'ordre* sur un ensemble non vide E est une relation, que l'on notera $\leq$, telle que :

- pour tout $x \in E$, on a $x \leq x$ (*réflexivité*) ;
- si x, y dans E sont tels que $x \leq y$ et $y \leq x$, on a alors $x = y$ (*anti-symétrie*) ;
- si x, y, z dans E sont tels que $x \leq y$ et $y \leq z$, on a alors $x \leq z$ (*transitivité*).

Si de plus, on a pour tous x, y dans E , $x \leq y$ ou $y \leq x$, on dit alors que la relation d'ordre est *totale*.

Un ensemble non vide E muni d'une relation d'ordre [resp. d'ordre total] est dit *ordonné* [resp. *totalement ordonné*].

Si $(E, \leq)$ est un ensemble ordonné, on notera respectivement, pour tous x, y dans E :

- $y \geq x$ pour $x \leq y$ (relation d'ordre inverse associée à $\leq$) ;
- $x < y$ pour $x \leq y$ et $x \neq y$ (ordre strict associé à $\leq$) ;
- $x > y$ pour $y < x$.

Définition 1.1. Un *corps totalement ordonné* est un corps commutatif $\mathbb{K}$ muni d'une relation d'ordre total $\leq$ compatible avec les opérations d'addition et de multiplication, c'est-à-dire telle que :

$$((x, y, z, t) \in \mathbb{K}^3, x \leq y \text{ et } t \geq 0) \Rightarrow (x + z \leq y + z \text{ et } xt \leq yt)$$

Si $(\mathbb{K}, \leq)$ est un corps totalement ordonné, on note alors :

$$\mathbb{K}^+ = \{x \in \mathbb{K} ; x \geq 0\}, \mathbb{K}^- = \{x \in \mathbb{K} ; x \leq 0\}$$

Les éléments de $\mathbb{K}^+$ sont dits positifs et ceux de $\mathbb{K}^-$ négatifs. Dans un tel corps, on a les « *règles des signes* » suivantes :

- $x \leq 0$ et $x \geq 0$ équivaut à $x = 0$ (anti-symétrie de $\leq$);
- $x \leq 0$ équivaut à $-x \geq 0$ (si $x \leq 0$, alors $0 = x + (-x) \leq -x$, si $-x \geq 0$, alors $0 = x + (-x) \geq x$);
- si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors $xy \geq 0$ (on multiplie par y la première inégalité);
- si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, alors $xy \geq 0$ ($-x \geq 0$, $-y \geq 0$, donc $xy = (-x)(-y) \geq 0$);
- $1 > 0$ ($1 \neq 0$ et $1 = 1^2 \geq 0$ d'après les deux points précédents);
- si $x \leq 0$ et $y \geq 0$, alors $xy \leq 0$ ($-x \geq 0$, donc $-xy = (-x)y \geq 0$ et $xy \leq 0$);
- si $x > 0$, alors $\frac{1}{x} > 0$ ($\frac{1}{x} \leq 0$ donnerait $1 = x\frac{1}{x} \leq 0$); si $x < 0$, alors $\frac{1}{x} < 0$.

Exemples 1.1 Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont totalement ordonnés par la relation d'ordre usuelle $\leq$ et $\mathbb{Q}$ est un corps totalement ordonné.

Lemme 1.1 Soit $(\mathbb{K}, \leq)$ un corps totalement ordonné. Pour tout entier $n \geq 1$ et toute famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ on a $\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, tous les x_i sont nuls.

Démonstration On procède par récurrence sur l'entier $n \geq 1$. Pour $n = 1$, il s'agit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a $x^2 \geq 0$, ce qui se déduit des règles de signes précédentes. Supposons le résultat acquis au rang $n \geq 1$ et soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. En ajoutant x_{n+1}^2 aux deux membres de l'inégalité $0 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2$, on obtient $0 \leq x_{n+1}^2 \leq \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$. Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ est telle que $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$, on a alors $0 \leq x_j^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ pour tout entier j compris entre 1 et n , ce qui implique que $x_j^2 = 0$, soit que $x_j = 0$ (on est dans un corps). ■

Dans le cas particulier où tous les x_i sont égaux à 1 dans le lemme précédent, on a $n = n \cdot 1 = \sum_{i=1}^n 1^2 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Du théorème précédent, on déduit qu'un corps algébriquement clos ne peut être totalement ordonné (exercice 1.1). C'est le cas en particulier pour le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes (le corps des réels et celui des complexes étant supposés construits).

Théorème 1.1.

Un corps totalement ordonné est de caractéristique nulle.

Démonstration Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $p \geq 2$ (un nombre premier). Si $\mathbb{K}$ est totalement ordonné, on a alors $0 \leq 1 \leq p \cdot 1 = 0$ et $1 = 0$, ce qui est impossible dans un corps. ■

Il résulte du théorème précédent que l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs et le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels s'injectent dans tout corps totalement ordonné $\mathbb{K}$ et un

tel corps est en particulier infini. Le sous-corps premier de $\mathbb{K}$ (à savoir le plus petit sous corps de $\mathbb{K}$) est identifié à $\mathbb{Q}$.

Pour toutes parties non vides A et B d'un corps commutatif $\mathbb{K}$, on note :

$$\begin{aligned} -A &= \{-x, x \in A\}, \quad A + B = \{x + y, (x, y) \in A \times B\} \\ A \cdot B &= \{xy, (x, y) \in A \times B\} \end{aligned}$$

Théorème 1.2.

Un corps commutatif $\mathbb{K}$ est totalement ordonné si, et seulement si, il existe une partie P de $\mathbb{K}$ telle que :

$$\begin{cases} P \cap (-P) = \{0\}, \quad P \cup (-P) = \mathbb{K} \\ P + P \subset P, \quad P \cdot P \subset P \end{cases} \quad (1.1)$$

En cas d'existence d'une telle partie P , la relation $\leq$ définie sur $\mathbb{K}$ par :

$$(x \leq y) \Leftrightarrow (y - x \in P)$$

est une relation d'ordre total compatible avec la structure de corps de $\mathbb{K}$.

Démonstration Si $(\mathbb{K}, \leq)$ est un corps totalement ordonné, on vérifie alors que l'ensemble $P = \mathbb{K}^+$ des éléments positifs de $\mathbb{K}$ vérifie les propriétés (1.1). Si x est dans $P \cap (-P)$, on a alors $x \geq 0$ et $x \leq 0$, soit $x = 0$. Réciproquement 0 est bien dans $P \cap (-P)$. Soit $x \in \mathbb{K}$. On a soit $x \in P$, soit $x \notin P$ et dans ce cas $x \leq 0$ (l'ordre est total), $y = -x \in P$ et $x = -y \in -P$. On a donc bien $P \cup (-P) = \mathbb{K}$ (l'inclusion $P \cup (-P) \subset \mathbb{K}$ étant évidente). Si x et y sont dans P , on a alors $x \geq 0$ et $y \geq 0$, donc $x + y \geq 0$ et $xy \geq 0$. On a donc bien $P + P \subset P$ et $P \cdot P \subset P$. Réciproquement supposons qu'il existe une partie P de $\mathbb{K}$ vérifiant les propriétés (1.1). On définit la relation $\leq$ sur $\mathbb{K}$ par :

$$(x \leq y) \Leftrightarrow (y - x \in P)$$

et on vérifie que c'est une relation d'ordre total compatible avec la structure de corps de $\mathbb{K}$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$ on a $x - x = 0 \in P$, donc $x \leq x$. La relation est réflexive. Si x, y dans $\mathbb{K}$ sont tels que $x \leq y$ et $y \leq x$, on a alors $y - x \in P$ et $x - y \in P$, donc $y - x = -(x - y) \in P \cap (-P)$ et $y = x$. La relation est anti-symétrique. Si x, y et z sont des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $x \leq y$ et $y \leq z$, on a alors $z - x = (y - x) + (z - y) \in P$, c'est-à-dire que $x \leq z$. La relation est transitive. Avec $P \cup (-P) = \mathbb{K}$ on déduit que l'ordre est total. Si $x \leq y$ dans $\mathbb{K}$, on a alors $(y + z) - (x + z) \in P$ pour tout z dans $\mathbb{K}$, donc $x + z \leq y + z$. Si $x \leq y$ et $0 \leq z$ dans $\mathbb{K}$, avec $P \cdot P \subset P$ on déduit que $z(y - x) \in P$ et $xz \leq yz$. ■

Corollaire 1.1. Il existe une unique relation d'ordre total sur $\mathbb{Q}$ compatible avec sa structure de corps.

Démonstration $\mathbb{Q}$ est déjà totalement ordonné avec l'ordre usuel. Soit $\preceq$ une relation d'ordre total sur $\mathbb{Q}$ compatible avec sa structure de corps. Le lemme 1.1

nous dit que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^+ = \{r \in \mathbb{Q}, 0 \prec r\}$, ce qui implique que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \cdot 1 \in \mathbb{Q}^+$. Avec $\mathbb{Q}^+ \cdot \mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{Q}^+$, on déduit que :

$$P = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*, p \wedge q = 1 \right\} \subset \mathbb{Q}^+$$

Réciproquement si $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$, $p = qr$ est alors dans $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}^+ = \mathbb{N}$ (en effet si p est négatif, on a alors $-p \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^+$ et $-r = \frac{1}{q}(-p) \in \mathbb{Q}^+$, ce qui impose $r = 0$). On a donc $P = \mathbb{Q}^+$, ce qui détermine de manière unique l'ordre compatible sur $\mathbb{Q}$. ■

Corollaire 1.2. Si $(\mathbb{K}, \leq)$ est un corps totalement ordonné, alors tout sous-corps de $\mathbb{K}$ est totalement ordonné par $\leq$ et tout corps isomorphe à $\mathbb{K}$ est totalement ordonné.

Démonstration Soit $(\mathbb{K}, \leq)$ un corps totalement ordonné. Si $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$, le sous-ensemble $P = \mathbb{L} \cap \mathbb{K}^+$ de $\mathbb{L}$ vérifie alors les propriétés (1.1) du théorème 1.2 et il en résulte que le corps $\mathbb{L}$ est totalement ordonnable par $\leq$. Soit σ un isomorphisme de $\mathbb{K}$ sur un corps commutatif $\mathbb{L}$. On vérifie facilement que le sous-ensemble $P = \sigma(\mathbb{K}^+)$ de $\mathbb{L}$ vérifie les propriétés (1.1) du théorème 1.2, ce qui implique que le corps $\mathbb{L}$ est totalement ordonnable par la relation :

$$(x \prec y) \Leftrightarrow (y - x \in \sigma(\mathbb{K}^+))$$

En écrivant que $x = \sigma(u)$, $y = \sigma(v)$ avec u, v uniquement déterminés dans $\mathbb{K}$, la condition $y - x = \sigma(w)$ avec w dans $\mathbb{K}^+$ équivaut à $v - u = w \in \mathbb{K}^+$, soit à $u \leq v$. La relation d'ordre sur $\mathbb{L}$ est donc naturellement définie par :

$$(x \prec y \text{ dans } \mathbb{L}) \Leftrightarrow (\sigma^{-1}(x) \leq \sigma^{-1}(y) \text{ dans } \mathbb{K})$$

■

Le théorème qui suit nécessite le lemme (ou l'axiome de *Zorn*) que nous rappelons.

Si $(E, \prec)$ est un ensemble ordonné et A une partie de E , on dit alors qu'un élément m de E est un *majorant* de A , si on a $x \prec m$ pour tout $x \in A$.

On dit que $(E, \prec)$ est *inductif* si toute partie non vide et totalement ordonnée de E admet un majorant.

On dit qu'un élément m d'une partie non vide A de E est *maximal* si, pour tout $x \in A$, la condition $m \prec x$ entraîne $x = m$.

Le lemme de Zorn affirme que tout ensemble non vide, ordonné et inductif admet un élément maximal. Ce lemme (qui peut être pris comme un axiome) est équivalent à l'axiome du choix ou à l'axiome de Zermelo.

Théorème 1.3.

Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2, $C_2 = \{x^2, x \in \mathbb{K}\}$ l'ensemble des carrés de $\mathbb{K}$ et $\sum_2$ le sous-ensemble de $\mathbb{K}$ dont les éléments peuvent s'écrire comme somme finie de carrés. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbb{K}$ est totalement ordonné ;
2. $\mathbb{K} \neq \sum_2$;
3. -1 n'est pas somme de carrés dans $\mathbb{K}$;
4. une somme de carrés $\sum_{i=1}^n x_i^2$ est nulle dans $\mathbb{K}$ si, et seulement si, tous les x_i sont nuls ;
5. il existe une partie P de $\mathbb{K}$ telle que $C_2 \subset P$, $P + P \subset P$, $P \cdot P \subset P$ et $P \cap (-P) = \{0\}$.

Démonstration

(1) $\Rightarrow$ (2) On suppose que $(\mathbb{K}, \leq)$ est totalement ordonné. De $C_2 \subset \mathbb{K}^+$ (lemme 1.1) et $\mathbb{K}^+ + \mathbb{K}^+ \subset \mathbb{K}^+$, on déduit que $\sum_2 \subset \mathbb{K}^+$ et comme $\mathbb{K}^+ \subsetneq \mathbb{K}$ ($-1 \notin \mathbb{K}^+$ car $\mathbb{K}^+ \cap (-\mathbb{K}^+) = \{0\}$), il en résulte que $\sum_2 \subsetneq \mathbb{K}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supposons que $\sum_2 \subsetneq \mathbb{K}$. Si $-1 \in \sum_2$, on a alors pour tout $x \in \mathbb{K}$, $(-1) \left(1 - \frac{x+1}{2}\right)^2 \in \sum_2$ ($\mathbb{K}$ étant de caractéristique différente de 2, on peut diviser par 2 dans ce corps) et $x = - \left(1 - \frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \in \sum_2$, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

(3) $\Rightarrow$ (4) Supposons que $-1 \notin \sum_2$ et soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$. Si j est un indice tel que $x_j \neq 0$, on a alors $-1 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^2 \in \sum_2$ (pour $n = 1$, le résultat est trivial), ce qui contredit l'hypothèse de départ. Les x_j sont donc tous nuls.

(4) $\Rightarrow$ (5) On suppose que 0 n'est pas somme de carrés non tous nuls. Pour $P = \sum_2$, on a facilement $C_2 \subset P$, $P + P \subset P$ et $P \cdot P \subset P$. Si $x \in P \cap (-P)$, il s'écrit alors $x = \sum_{i=1}^n x_i^2 = - \sum_{j=1}^m y_j^2$ et on a $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{j=1}^m y_j^2 = 0$, ce qui entraîne que tous les x_i et tous les y_j sont nuls, soit que $x = 0$.

(5) $\Rightarrow$ (1) Pour cette implication, nous avons besoin du lemme de Zorn. Soit :

$$E = \{Q \subset \mathbb{K} ; C_2 \subset Q, Q + Q \subset Q, Q \cdot Q \subset Q, Q \cap (-Q) = \{0\}\}$$

L'hypothèse (5) nous dit que E est non vide. Il est partiellement ordonné par $\subset$ et est inductif. En effet si A est une partie non vide totalement ordonnée de E ,

on montre alors que $M = \bigcup_{Q \in A} Q$ est dans E et majore A . C_2 qui est contenu dans tous les $Q \in A$ est aussi contenu dans M . Si x, y sont dans M on a $x \in Q$ et $y \in Q'$ avec $Q \subset Q'$ ou $Q' \subset Q$ (A est totalement ordonné), donc $x + y$ est dans $Q' + Q' \subset Q'$ ou dans $Q + Q \subset Q$, soit dans les deux cas $x + y \in M$. On voit de manière analogue que $M \cdot M \subset M$. Enfin si $x \in M \cap (-M)$, on a $x \in Q$ et $-x \in Q'$, donc x est dans $Q \cap (-Q)$ ou dans $Q' \cap (-Q')$ et il est nul. Le lemme de Zorn nous dit alors que E admet un élément maximal P . Si on montre que $P \cup (-P) = \mathbb{K}$ on aura montré que $\mathbb{K}$ est totalement ordonné (théorème 1.2). Soit donc $x \in \mathbb{K}$ et supposons que $x \notin P$. Montrons que $Q = P - xP = \{y - xz, (y, z) \in P^2\}$ est dans E . On a $C_2 \subset P \subset Q$. Avec $P + P \subset P$, on déduit que $Q + Q \subset Q$. Si $u_1 = y_1 - xz_1$ et $u_2 = y_2 - xz_2$ sont dans Q , on a alors $u_1 u_2 = y_3 - xz_3$ avec $y_3 = y_1 y_2 + z_1 z_2 x^2 \in P \cdot P + P \cdot P \cdot C_2 \subset P$ et $z_3 = z_1 y_2 + y_1 z_2 \in P \cdot P + P \cdot P \subset P$ puisque $C_2 \subset P$, $P \cdot P \subset P$ et $P + P \subset P$. On a donc $Q \cdot Q \subset Q$. Si $u \in Q \cap (-Q)$, on a alors $u = y_1 - xz_1 = -(y_2 - xz_2)$ et $y_1 + y_2 = x(z_1 + z_2)$. Si $z_1 + z_2 = 0$, on a alors $y_1 + y_2 = 0$, ce qui implique que $y_1 = -y_2$ et $z_1 = -z_2$ sont dans $P \cap (-P) = \{0\}$ et $u = 0$. Si $z_1 + z_2 \neq 0$, alors $x = \left(\frac{1}{z_1 + z_2}\right)^2 (y_1 + y_2)(z_1 + z_2)$ est dans $C_2 \cdot P \cdot P \subset P$, ce qui contredit $x \notin P$. On a donc $Q \cap (-Q) = \{0\}$. Au final, on a $Q \in E$ avec $P \subset Q$ et P maximal, ce qui implique $Q = P$ et $-x \in Q \subset P$, soit $x \in -P$. ■

Théorème 1.4. Artin-Schreier

Un corps commutatif $\mathbb{K}$ est totalement ordonné si, et seulement si, -1 n'est pas somme de carrés dans $\mathbb{K}$.

Démonstration Si $\mathbb{K}$ est totalement ordonné, il est alors de caractéristique nulle et le théorème précédent nous dit que -1 n'est pas somme de carrés dans $\mathbb{K}$. Réciproquement, si -1 n'est pas somme de carrés dans $\mathbb{K}$, le corps $\mathbb{K}$ est alors de caractéristique différente de 2 (on a $-1 = 1^2$ dans un corps de caractéristique 2) et le théorème précédent nous dit que $\mathbb{K}$ est totalement ordonné. ■

1.2 Minorants et majorants dans un corps totalement ordonné

Pour ce paragraphe ($\mathbb{K}, \leq$) désigne un corps totalement ordonné. Ce corps est de caractéristique nulle et $\mathbb{Q}$ en est un sous corps (plus précisément, le sous-corps premier de $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{Q}$). On note $\mathbb{K}^{+,*} = \mathbb{K}^+ \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{K}, x > 0\}$ et les éléments de $\mathbb{K}^{+,*}$ sont dits strictement positifs.

Pour tous $a \leq b$ dans $\mathbb{K}$, on définit les ensembles :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{K}, a \leq x \leq b\}, \quad [a, b[= \{x \in \mathbb{K}, a \leq x < b\}$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{K}, a < x \leq b\}, \quad]a, b[= \{x \in \mathbb{K}, a < x < b\}$$

Pour $a = b$, on a $[a, b] = \{a\}$ et $[a, b[=]a, b] =]a, b[= \emptyset$.

Ces ensembles sont appelés *intervalles* et un ensemble du type $[a, b]$ est appelé *segment*.

On peut définir sur $(\mathbb{K}, \leq)$ les notions de minorant, majorant, bornes inférieure et supérieure.

Définition 1.2. Soit X une partie non vide de $\mathbb{K}$. On dit que $m \in \mathbb{K}$ [resp. $M \in \mathbb{K}$] est un *minorant* [resp. est un *majorant*] de X si on a $m \leq x$ [resp. $x \leq M$] pour tout $x \in X$. On dit que $m \in \mathbb{K}$ est une *borne inférieure* [resp. est une *borne supérieure*] de X si m est un minorant [resp. M est un majorant] de X et si tout $m' > m$ [resp. tout $M' < M$] dans $\mathbb{K}$ n'est pas minorant [resp. n'est pas majorant] de X .

Dire que $m \in \mathbb{K}$ est une borne inférieure [resp. est une borne supérieure] de $X \subset \mathbb{K}$ équivaut à dire que l'on a $m \leq x$ [resp. $x \leq M$] pour tout $x \in X$ et :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}, \exists x \in X ; m \leq x < m + \varepsilon \text{ [resp. } M - \varepsilon < x \leq M]$$

ce qui peut aussi s'exprimer en disant que m [resp. M] est le plus grand des minorants [resp. le plus petit des majorants] de X .

Un sous-ensemble non vide d'un corps totalement ordonné qui admet un minorant [resp. un majorant] est dit *minoré* [resp. *majoré*]. On dit qu'il est *borné* s'il est minoré et majoré.

Théorème 1.5.

Soit X un sous-ensemble non vide de $\mathbb{K}$. Si X admet une borne inférieure [resp. une borne supérieure], elle est alors unique.

Démonstration Supposons que X admette deux bornes supérieures $M' < M$. Pour $\varepsilon = M - M' \in \mathbb{K}^{+,*}$, on peut trouver $x \in X$ tel que $M' = M - \varepsilon < x \leq M$, ce qui contredit l'inégalité $x \leq M'$. L'ensemble X admet donc au plus une borne supérieure. On procède de manière analogue pour la borne inférieure. ■

En cas d'existence, on peut donc noter $m = \inf(X)$ la borne inférieure de X et $M = \sup(X)$ sa borne supérieure et on a $\inf(X) \leq \sup(X)$.

Avec l'exercice 1.2 on donne quelques propriétés élémentaires, mais souvent utiles, des bornes inférieure et supérieure.

La borne inférieure ou supérieure de X quand elle existe n'est pas nécessairement un élément de X . Si $\inf(X)$ [resp. $\sup(X)$] existe et est dans X , on dit alors que $\inf(X)$ [resp. $\sup(X)$] est le *plus petit élément* [resp. le *plus grand élément*] de X et on le note $\min(X)$ [resp. $\max(X)$].

Exemples 1.2

- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément et toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.
- Dans le cas où X est une partie finie de $\mathbb{K}$, ses éléments peuvent être rangés dans l'ordre croissant $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ (l'ordre est total) et l'existence des plus petit et plus grand élément est assurée.

- Le sous-ensemble $X = \{r \in \mathbb{Q}, r^2 < 2\}$ de $\mathbb{Q}$ est non vide et majoré, mais n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ (exercice 1.3).

Dans $(\mathbb{K}, \leq)$, on définit la *valeur absolue* d'un élément x par :

$$|x| = \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Cette valeur absolue vérifie les propriétés suivantes, où $(x, y) \in \mathbb{K}^2$:

- $|x| \in \mathbb{K}^+$; $|-x| = |x|$; $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$; $|x| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$;
- $|xy| = |x| |y|$; $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ (*inégalités triangulaires*) ;
- pour $\alpha \in \mathbb{K}^+$, $|x| \leq \alpha$ équivaut à $-\alpha \leq x \leq \alpha$ ou encore à $x \in [-\alpha, \alpha]$;
- $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$ et $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ (on distingue les cas $x \geq y$ et $x \leq y$).

Lemme 1.2 Un élément x de $\mathbb{K}$ est nul si, et seulement si, on a $|x| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$.

Démonstration Pour tout $x \in \mathbb{K}^*$, on a $\varepsilon = \frac{|x|}{2} \in \mathbb{K}^{+,*}$ et l'inégalité $|x| < \varepsilon$ ne peut être réalisée (elle équivaut à $2|x| < |x|$, soit à $|x| < 0$, ce qui n'est pas). La condition nécessaire est claire. ■

1.3 Suites à valeurs dans un corps totalement ordonné

$(\mathbb{K}, \leq)$ désigne un corps totalement ordonné.

Une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ (ou à valeurs dans $\mathbb{K}$) est une application définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On se limite pour ce paragraphe aux suites définies sur $\mathbb{N}$ (on peut toujours s'y ramener par changement d'indice) et on note $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une telle suite. L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre commutative et unitaire pour les opérations classiques d'addition interne et de multiplications interne et externe, à savoir pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

$$u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \lambda \cdot u = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad u \cdot v = (u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Définition 1.3. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *suite extraite* (ou une *sous suite*) de u s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On vérifie facilement par récurrence que si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante, on a alors $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.4. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *minorée* [resp. est *majorée*], si l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ de ses valeurs est minoré [resp. est majoré], ce qui revient à dire qu'il existe $m \in \mathbb{K}$ tel que $u_n \geq m$ [resp. $u_n \leq M$] pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'elle est *bornée*, si elle est minorée et majorée.

Dire qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est bornée revient aussi à dire qu'il existe $M \in \mathbb{K}^+$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'ensemble des suites bornées d'éléments de $\mathbb{K}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Définition 1.5. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *convergente*, s'il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_\varepsilon, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Dans la définition précédente, les deux dernières inégalités peuvent être strictes ou larges et la condition $|u_n - \ell| < \varepsilon$ peut être remplacée par $|u_n - \ell| < \alpha \varepsilon$ où $\alpha \in \mathbb{K}^{+,*}$ est donné (si pour tout $\varepsilon' \in \mathbb{K}^{+,*}$, on a $|u_n - \ell| < \alpha \varepsilon'$ pour tout $n \geq n_{\varepsilon'}$, on en déduit que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, en prenant $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\alpha}$, on a $|u_n - \ell| < \alpha \varepsilon' = \varepsilon$ pour tout $n \geq n_{\varepsilon'}$).

Une suite non convergente est dite *divergente*.

En utilisant l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$, on vérifie qu'une suite convergente est bornée. Il en résulte qu'une suite non bornée est divergente.

Théorème 1.6.

Si une suite converge dans $\mathbb{K}$, sa limite est alors uniquement déterminée.

Démonstration Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ et ℓ' dans $\mathbb{K}$, on peut alors trouver pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$ un entier n_ε tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$, on ait :

$$|\ell - \ell'| = |(\ell - u_n) + (u_n - \ell')| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| < 2\varepsilon$$

ce qui équivaut à $\ell - \ell' = 0$ (lemme 1.2). ■

L'unicité de la limite permet d'écrire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Théorème 1.7.

Si une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente, toute suite extraite converge alors vers la même limite.

Démonstration Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui implique que pour toute fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, on a $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ (puisque $\varphi(n) \geq n \geq n_\varepsilon$). La suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente vers ℓ . ■

Pour vérifier qu'une suite est divergente, il suffit d'après le théorème précédent d'en extraire une sous-suite divergente ou deux sous-suites convergentes vers des limites distinctes.

Exemples 1.3

- La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge car la suite $((-1)^{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers -1 et la suite $((-1)^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $1 \neq -1$ dans $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente. En effet, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ dans $\mathbb{K}$, on a alors $1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell - \ell = 0$, ce qui est impossible dans un corps.
- Contrairement à ce que l'on pourrait espérer, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement convergente dans un corps totalement ordonné (voir le théorème 1.12 et l'exercice 1.5).

Théorème 1.8.

L'ensemble $\text{Co}(\mathbb{K})$ des suites convergentes d'éléments de $\mathbb{K}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = \ell' \neq 0$, il existe alors un entier n_0 tel que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ soit définie et cette suite converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.

Démonstration La suite constante égale à 1 est convergente vers 1. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = \ell'$. Ces suites étant bornées, il existe $M \in \mathbb{K}^{+,*}$ tel que $|u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et $|v_n - \ell'| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ dans $\mathbb{N}$, ce qui nous donne :

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < 2\varepsilon$$

et :

$$|u_n v_n - \ell \ell'| \leq |(u_n - \ell) v_n| + |\ell (v_n - \ell')| \leq M |u_n - \ell| + |\ell| |v_n - \ell'| \leq (M + |\ell|) \varepsilon$$

ce qui signifie que les suite $u + v$ et $u \cdot v$ convergent respectivement vers $\ell + \ell'$ et vers $\ell \cdot \ell'$. Prenant v constante égale à λ , on en déduit que λv converge vers $\lambda \ell$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = \ell' \neq 0$, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (|v_n|) = |\ell'| > 0$ et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$

tel que $|v_n| > \frac{|\ell'|}{2}$ pour $n \geq n_0$, donc $\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| = \left|\frac{\ell' - v_n}{\ell' v_n}\right| \leq \frac{2}{|\ell'|^2} |v_n - \ell'|$

pour tout $n \geq n_0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{\ell'}$. Le résultat sur le produit nous donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\ell}{\ell'}.$$

■

La démonstration du théorème précédent nous dit aussi que l'application qui associe à une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Co}(\mathbb{K})$ sa limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \in \mathbb{K}$ est un morphisme de $\mathbb{K}$ -algèbres.

Avec les théorèmes qui suivent, on résume quelques propriétés des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ en relation avec l'ordre.

Théorème 1.9.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

1. S'il existe $\ell \in \mathbb{K}$, une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^+)^{\mathbb{N}}$ et un entier naturel n_0 tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ et $|u_n - \ell| \leq \varepsilon_n$ pour tout entier $n \geq n_0$, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (|u_n|) = |\ell|$.
3. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une suite bornée, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = 0$.

Démonstration

1. Résulte de :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}, \exists n_\varepsilon \geq n_0 ; \forall n \geq n_\varepsilon, |u_n - \ell| \leq \varepsilon_n < \varepsilon$$

2. De $||u_n| - |\ell|| \leq \varepsilon_n = |u_n - \ell|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ (qui résulte de la définition de la convergence), on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (|u_n|) = |\ell|$.

3. En désignant par M un majorant de la suite $(|v_n|)_{n \in \mathbb{N}}$, on déduit des inégalités $|u_n v_n| \leq M |u_n|$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} (|u_n|) = 0$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = 0$. ■

Théorème 1.10.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = \ell'$.

1. Si $\ell > \ell'$ [resp. si $\ell < \ell'$], on a alors $u_n > v_n$ [resp. $u_n < v_n$] à partir d'un certain rang.
2. Si $u_n \leq v_n$ [resp. si $u_n \geq v_n$] à partir d'un certain rang, on a alors $\ell \leq \ell'$ [resp. $\ell \geq \ell'$].
3. Si M est un majorant [resp. si m est un minorant] de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a alors $\ell \leq M$ [resp. $\ell \geq m$].
4. Les suites $(\min(u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\max(u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\min(\ell, \ell')$ et $\max(\ell, \ell')$.
5. Si $\ell = \ell'$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est telle que $u_n \leq w_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n) = \ell$.

Démonstration

1. Si $\ell > \ell'$, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \ell - \ell' \in \mathbb{K}^{+,*}$ et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $-\frac{\ell - \ell'}{2} + \ell - \ell' < u_n - v_n < \frac{\ell - \ell'}{2} + \ell - \ell'$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui nous donne $u_n - v_n > \frac{\ell - \ell'}{2} > 0$ pour tout $n \geq n_0$, soit $u_n > v_n$. Pour $\ell < \ell'$, on travaille avec la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Se déduit facilement du point précédent en raisonnant par l'absurde.
3. Se déduit facilement du point précédent en prenant pour suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [resp. pour suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$] la suite constante égale à M [resp. égale à m].
4. Se déduit de $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$ et $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.
5. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq w_n \leq v_n \leq \ell + \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui nous dit que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ . ■

Définition 1.6. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_\varepsilon, \forall m \geq n_\varepsilon, |u_n - u_m| < \varepsilon$$

Là encore, les trois dernières inégalités peuvent être strictes ou larges et la condition $|u_n - u_m| < \varepsilon$ peut être remplacée par $|u_n - u_m| < \alpha \varepsilon$ où $\alpha \in \mathbb{K}^{+,*}$ est donné.

Une suite de Cauchy est bornée et une suite convergente est de Cauchy. Mais une suite de Cauchy n'est pas nécessairement convergente dans $\mathbb{K}$ (voir l'exercice 1.4 pour $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$).

Lemme 1.3 Une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente si, et seulement si, on peut en extraire une sous-suite convergente.

Démonstration La condition nécessaire est évidente. Réciproquement, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dont on peut extraire une sous-suite convergente $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de limite ℓ . On peut trouver pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$ un entier n_ε tel que $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$ et $|u_m - u_n| \leq \varepsilon$ pour tous $n \geq n_\varepsilon$ et $m \geq n_\varepsilon$. Il en résulte que :

$$|u_m - \ell| \leq |u_m - u_{\varphi(n_\varepsilon)}| + |u_{\varphi(n_\varepsilon)} - \ell| \leq 2\varepsilon$$

pour tout $m \geq n_\varepsilon$ (puisque $\varphi(n_\varepsilon) \geq n_\varepsilon$). ■

Définition 1.7. Un corps totalement ordonné $\mathbb{K}$ est dit *complet*, si toute suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente.

L'exercice 1.4 nous dit que le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels n'est pas complet (pour l'ordre usuel).

Théorème 1.11.

L'ensemble $\text{Ca}(\mathbb{K})$ des suites de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ stable par la valeur absolue.

Démonstration La suite constante égale à 1 est de Cauchy. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de Cauchy. Ces suites étant bornées, il existe $M \in \mathbb{K}^{+,*}$ tel que $|u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - u_m| < \varepsilon$ et $|v_n - v_m| < \varepsilon$ pour tous $n \geq n_\varepsilon$ et $m \geq n_\varepsilon$ dans $\mathbb{N}$, ce qui donne $|(u_n + v_n) - (u_m + v_m)| < 2\varepsilon$ et $|u_n v_n - u_m v_m| \leq |u_n(v_n - v_m)| + |(u_n - u_m)v_m| \leq 2M\varepsilon$, ce qui nous dit que $u + v$ et $u \cdot v$ sont de Cauchy. Prenant v constante égale à λ , on en déduit que λv est aussi de Cauchy. En utilisant l'inégalité triangulaire $||x| - |y|| \leq |x - y|$, on vérifie que la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. ■

L'algèbre $\text{Co}(\mathbb{K})$ des suites convergentes d'éléments de $\mathbb{K}$ est une sous-algèbre de $\text{Ca}(\mathbb{K})$.

Le lemme qui suit nous sera utile pour construire le corps des réels à partir des suites de Cauchy de rationnels (paragraphe 1.5).

Lemme 1.4 *L'ensemble $Z(\mathbb{K})$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ qui convergent vers 0 est un idéal de l'anneau $\text{Ca}(\mathbb{K})$ des suites de Cauchy.*

Démonstration L'ensemble $Z(\mathbb{K})$ des suites convergentes vers 0 qui est le noyau du morphisme d'anneaux $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Co}(\mathbb{K}) \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \in \mathbb{K}$ est un idéal de $\text{Co}(\mathbb{K})$, ce dernier anneau étant contenu dans $\text{Ca}(\mathbb{K})$, on en déduit que $Z(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $\text{Ca}(\mathbb{K})$. Une suite de Cauchy étant bornée, on déduit du théorème 1.9 que pour toutes suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Z(\mathbb{K})$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ca}(\mathbb{K})$, on a $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Z(\mathbb{K})$. L'ensemble $Z(\mathbb{K})$ est donc un idéal de $\text{Ca}(\mathbb{K})$. ■

Définition 1.8. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *croissante* [resp. *décroissante*], si elle est telle que $u_{n+1} \geq u_n$ [resp. $u_{n+1} \leq u_n$] pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'elle est *monotone*, si elle est croissante ou décroissante.

Lemme 1.5 *De toute suite d'éléments de $\mathbb{K}$, on peut extraire une sous-suite monotone.*

Démonstration Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $A = \{n \in \mathbb{N} ; \forall m > n, u_m \leq u_n\}$. Si l'ensemble A est fini, il admet alors un plus grand élément $n_0 \in A$ et il existe un entier $n_1 > n_0 + 1$ tel que $u_{n_1} > u_{n_0+1}$ ($n_0 + 1 \notin A$). Comme $n_1 \notin A$, il existe un entier $n_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} > u_{n_1}$ et ainsi de suite, on construit par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que $u_{n_{k+1}} > u_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. La suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est alors extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et strictement croissante. Si A est infinie, on peut alors ranger ses éléments dans l'ordre strictement croissant, soit $A = \{n_k, k \in \mathbb{N}\}$ avec $n_k < n_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et par construction, on a $u_{n_{k+1}} \leq u_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et décroissante. ■

Définition 1.9. Deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ sont dites *adjacentes*, si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

Lemme 1.6 Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$ adjacentes, on a alors $u_n \leq v_m$ pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.

Démonstration Supposons qu'il existe deux entiers n et m tels que $u_n > v_m$. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, on a pour tout entier $k \geq \max(n, m)$, $u_k \geq u_n$ et $v_k \leq v_m$, donc $u_k - v_k \geq u_n - v_m > 0$ et en conséquence $0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} (u_k - v_k) \geq u_n - v_m > 0$, ce qui est impossible. ■

1.4 Corps totalement ordonnés archimédiens

$(\mathbb{K}, \leq)$ désigne un corps totalement ordonné.

Définition 1.10. On dit que $\mathbb{K}$ est *archimédien*, s'il est tel que :

$$\forall a \in \mathbb{K}^{+,*}, \forall b \in \mathbb{K}^+, \exists n \in \mathbb{N}; na > b$$

Exemple 1.1 Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est archimédien. Il en résulte qu'entre deux rationnels distincts, il y a une infinité de rationnels.

Définition 1.11. On dit qu'une partie non vide D de $\mathbb{K}$ est *dense* dans $\mathbb{K}$, si pour tous $x < y$ dans $\mathbb{K}$, il existe $r \in D$ tel que $x < r < y$.

Théorème 1.12.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbb{K}$ est archimédien ;
2. la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 dans $\mathbb{K}$;
3. la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente dans $\mathbb{K}$;
4. pour tout $x \in \mathbb{K}$ il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$;
5. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{K}$.

Démonstration

(1) $\Rightarrow$ (2) On suppose que $\mathbb{K}$ est archimédien. Dans ce cas pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n_\varepsilon \varepsilon > 1$, ce qui nous donne $\left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$ et prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ dans $\mathbb{K}$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) La condition nécessaire est évidente. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \ell \neq 0$ dans $\mathbb{K}$, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ell} \right)^{-1} = \frac{1}{\ell}$, ce qui est impossible (exemples 1.3), donc si la suite $\left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{K}$, c'est nécessairement vers 0.

(3) $\Rightarrow$ (4) On suppose que $\left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{K}$, donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ dans $\mathbb{K}$ et on se donne $x \in \mathbb{K}$. Pour $x \in \mathbb{Z}$, il suffit de prendre $n = x$. On suppose donc x non entier et dans un premier temps on suppose qu'il est dans $\mathbb{K}^{+,*}$. Dans ce cas, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left| \frac{1}{m} \right| = \frac{1}{m} < \frac{1}{x}$, soit tel que $m > x$, donc l'ensemble des entiers $m \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $m > x$ est non vide et en conséquence admet un plus petit élément p qui vérifie $p > x$ et $p - 1 \leq x$. Il suffit alors de poser $n = p - 1$. Pour $x \in \mathbb{K}^-$ en raisonnant avec $-x \in \mathbb{K}^+$ on aboutit à l'existence d'un entier p vérifiant $p \leq -x < p + 1$, soit $-(p + 1) < x < -p$ et $n = -(p + 1)$ convient. S'il existe deux entiers n et p tels que $n \leq x < n + 1$ et $p \leq x < p + 1$, on a alors $n - p < 1$, soit $n - p \leq 0$ et $n - p > -1$, soit $n - p \geq 0$ et nécessairement $n = p$. D'où l'unicité de n tel que $n \leq x < n + 1$. On note $[x]$ cet entier.

(4) $\Rightarrow$ (5) On suppose (4) vérifiée et on se donne $x < y$ dans $\mathbb{K}$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq \frac{1}{y - x} < n + 1$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq (n + 1)|x| < m + 1$, ce qui nous donne $(n + 1)(y - x) > 1$ et $\frac{m + 1}{n + 1} > |x|$. Il en résulte que $E = \left\{ k \in \mathbb{Z}, \frac{k}{n + 1} \leq x \right\}$ est non vide (on a $-\frac{m + 1}{n + 1} < -|x| \leq x$, donc $-(m + 1) \in E$) et majoré par $m + 1$ (pour $k \in E$, on a $\frac{k}{n + 1} \leq x < \frac{m + 1}{n + 1}$, donc $k \leq m + 1$). Cet ensemble E admet donc un plus grand élément p qui est tel que $\frac{p}{n + 1} \leq x < \frac{p + 1}{n + 1}$. Enfin avec $(n + 1)(y - x) > 1$, on déduit que $y > \frac{1}{n + 1} + x \geq \frac{1}{n + 1} + \frac{p}{n + 1}$ et $x < \frac{p + 1}{n + 1} < y$.

(5) $\Rightarrow$ (1) On suppose que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{K}$ et on se donne $(a, b) \in \mathbb{K}^{+,*} \times \mathbb{K}^+$. Il existe alors un rationnel $r = \frac{n}{m}$, où $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $0 \leq \frac{b}{a} < \frac{n}{m} < \frac{b}{a} + 1$, ce qui implique que $na > mb \geq b$. Le corps $\mathbb{K}$ est donc archimédien. ■

Exemple 1.2 Pour $\mathbb{K}$ totalement ordonné, en munissant le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ de la relation définie par :

$$\left(\frac{\sum_{k=0}^n a_k X^k}{\sum_{k=0}^m b_k X^k} \geq 0 \right) \Leftrightarrow (a_n \geq 0)$$

(pour $a_n \neq 0$ et $b_m = 1$) on définit un corps totalement ordonné non archimédien et dans ce corps la suite $\left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 (exercice 1.5).

Définition 1.12. Avec les notations de la propriété (4) du théorème précédent, l'entier n est appelé la *partie entière* de x .

Pour $\mathbb{K}$ archimédien, la partie entière de $x \in \mathbb{K}$ peut être notée $[x]$, $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$. Nous opterons pour la notation $[x]$.

Pour $\mathbb{K}$ archimédien, la densité peut se traduire de façon séquentielle comme suit.

Théorème 1.13.

Pour $\mathbb{K}$ archimédien, une partie non vide D de $\mathbb{K}$ est dense dans $\mathbb{K}$ si, et seulement si, tout élément de $\mathbb{K}$ est limite d'une suite d'éléments de D .

Démonstration Si D est dense dans $\mathbb{K}$, alors pour tous $x \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $r_n \in D$ tel que $x < r_n < x + \frac{1}{n}$ et de cet encadrement dans $\mathbb{K}$ archimédien, on déduit que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$. Réciproquement, si tout élément de $\mathbb{K}$ est limite d'une suite d'éléments de D , alors pour tous $x < y$ dans $\mathbb{K}$, il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D qui converge vers $\frac{1}{2}(x+y)$ et de $x < \frac{1}{2}(x+y) < y$ on déduit que pour n assez grand, on aura $x < r_n < y$ (point 1 du théorème 1.10), ce qui implique que D est dense dans $\mathbb{K}$. ■

Le théorème qui suit est essentiel dans le cas particulier du corps des réels dont une construction fait l'objet du paragraphe 1.5. La démonstration de ce théorème nécessite le lemme qui suit.

Lemme 1.7 Soit X une partie non vide majorée d'un corps totalement ordonné et archimédien $\mathbb{K}$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$ et tout majorant M de X , il existe $x \in X$ et un majorant $M_\varepsilon \in \mathbb{K}$ de X tels que $M_\varepsilon \leq M$ et $0 \leq M_\varepsilon - x < \varepsilon$.

Démonstration On se donne $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$. Si $M \in \mathbb{K}$ est un majorant de X , l'ensemble $A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}, M - n\varepsilon \text{ majore } X\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (elle contient 0). Pour x_0 donné dans X (X est non vide), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0\varepsilon \geq M - x_0$ (le corps $\mathbb{K}$ est archimédien), de sorte que pour tout entier $n \geq n_0$, on a $n\varepsilon \geq n_0\varepsilon \geq M - x_0$, soit $x_0 \geq M - n\varepsilon$ et $n \notin A_\varepsilon$. L'ensemble A_ε est donc

majoré dans $\mathbb{N}$ et en conséquence admet un plus grand élément n_ε . Il en résulte que $M_\varepsilon = M - n_\varepsilon \varepsilon \leq M$ est un majorant de X tel que $M_\varepsilon - \varepsilon = M - (n_\varepsilon + 1) \varepsilon$ ne majore pas X , donc il existe $x \in X$ tel que $M_\varepsilon - \varepsilon < x \leq M_\varepsilon$, soit $0 \leq M_\varepsilon - x < \varepsilon$. ■

Théorème 1.14.

Pour $\mathbb{K}$ totalement ordonné, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. toute partie non vide et majorée de $\mathbb{K}$ admet une borne supérieure ;
2. toute partie non vide et minorée de $\mathbb{K}$ admet une borne inférieure ;
3. toute suite croissante majorée d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente ;
4. toute suite décroissante minorée d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente ;
5. de toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}$ on peut extraire une sous-suite convergente ;
6. $\mathbb{K}$ est archimédien et complet ;
7. $\mathbb{K}$ est archimédien et deux suites adjacentes d'éléments de $\mathbb{K}$ convergent vers la même limite ;
8. $\mathbb{K}$ est archimédien et pour toute suite $([u_n, v_n])_{n \in \mathbb{N}}$ de segments emboîtés dans $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire telle que $u_n < v_n$ et $[u_{n+1}, v_{n+1}] \subset [u_n, v_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$, il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [u_n, v_n] = \{\ell\}.$$

Démonstration

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Supposons que (1) soit vérifiée. Si X est une partie non vide et minorée de $\mathbb{K}$, l'ensemble $-X$ est alors non vide majorée, donc admet une borne supérieure M et $m = -M$ est une borne inférieure de X , ce qui prouve que (1) $\Rightarrow$ (2) avec $\sup(-X) = -\inf(X)$. De manière analogue, on vérifie que (2) $\Rightarrow$ (1).

(2) $\Rightarrow$ (3) Si (2) est vérifiée, il en est alors de même de (1). Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée d'éléments de $\mathbb{K}$, l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ qui est non vide et majoré admet alors une borne supérieure ℓ . Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon \leq u_{n_\varepsilon} \leq \ell$, ce qui implique que $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell$, soit $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, pour tout $n \geq n_\varepsilon$ puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et ℓ majore cette suite. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente vers $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} (u_n)$.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) Supposons (3) vérifiée. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée d'éléments de $\mathbb{K}$, la suite $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors croissante et majorée, donc convergente vers $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} (-u_n)$, ce qui implique que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $-\ell = \inf_{n \in \mathbb{N}} (u_n)$. De manière analogue, on vérifie que (4) $\Rightarrow$ (3).

(4) $\Rightarrow$ (5) Si (4) est vérifiée, il en est alors de même de (3). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}$. En utilisant le lemme 1.5, on peut extraire de cette suite

une sous-suite monotone $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et cette suite est alors croissante majorée ou décroissante minorée, donc convergente.

(5) $\Rightarrow$ (6) Supposons que (5) soit vérifiée. Si $\mathbb{K}$ n'est pas archimédien, il existe alors $a \in \mathbb{K}^{+,*}$ et $b \in \mathbb{K}^+$ tels que $0 \leq na < b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(na)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors bornée et on peut en extraire une sous-suite convergente $(\varphi(n)a)_{n \in \mathbb{N}}$, ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\varphi(n+1) - \varphi(n))a = 0$ avec $\varphi(n+1) - \varphi(n) \geq 1$ (φ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) soit $(\varphi(n+1) - \varphi(n))a \geq a$, ce qui est impossible (à partir d'un certain rang, on aurait $0 \leq (\varphi(n+1) - \varphi(n))a < a$). Le corps $\mathbb{K}$ est donc archimédien. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$, elle est alors bornée et on peut en extraire une sous-suite convergente $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, ce qui implique d'après le lemme 1.3 qu'elle converge. Le corps $\mathbb{K}$ est donc complet.

(6) $\Rightarrow$ (7) On suppose que $\mathbb{K}$ est archimédien et complet et on se donne $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$ adjacentes. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$ il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq v_{n_\varepsilon} - u_{n_\varepsilon} < \varepsilon$. En utilisant le lemme 1.6, on a pour $m > n \geq n_\varepsilon$, $u_m \leq v_{n_\varepsilon}$ et $u_{n_\varepsilon} \leq v_m$, ce qui nous donne compte tenu de la croissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de la décroissance de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$0 \leq u_m - u_n \leq v_{n_\varepsilon} - u_{n_\varepsilon} < \varepsilon \text{ et } 0 \leq v_n - v_m \leq v_{n_\varepsilon} - u_{n_\varepsilon} < \varepsilon$$

soit $|u_m - u_n| < \varepsilon$ et $|v_m - v_n| < \varepsilon$, ce qui nous dit que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de Cauchy, donc convergentes. De $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$, on déduit que ces suites convergent vers la même limite.

(7) $\Leftrightarrow$ (8) Supposons que (7) soit vérifiée. Des inclusions $[u_{n+1}, v_{n+1}] \subset [u_n, v_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. De plus l'hypothèse $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ nous dit que ces suites sont adjacentes, donc convergentes vers une même limite ℓ . On a alors $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [u_n, v_n]$. Si $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [u_n, v_n]$, on a alors $u_n \leq x \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et faisant tendre n vers l'infini, il en résulte que $x = \ell$. Au final, on a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [u_n, v_n] = \{\ell\}$. Réciproquement, on suppose que (8) est vérifiée et on se donne

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$ adjacentes. La suite $([u_n, v_n])_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une suite de segments emboîtés dans $\mathbb{K}$ (on a $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$, donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [u_n, v_n] = \{\ell\}$. S'il existe

$\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$ tel que $u_n \leq \ell - \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $u_n \leq \ell - \varepsilon < \ell \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\ell - \varepsilon \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [u_n, v_n]$ avec $\ell - \varepsilon \neq \ell$, ce qui n'est pas possible.

Donc pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon < u_{n_\varepsilon}$, ce qui implique que $\ell - \varepsilon < u_n$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$. De manière analogue, on vérifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

(8) $\Rightarrow$ (1) Soit X_1 une partie non vide et majorée de $\mathbb{K}$. Le lemme 1.7 nous dit qu'il existe $u_1 \in X_1$ et un majorant $v_1 \in \mathbb{K}$ de X_1 tels $0 \leq v_1 - u_1 < 1$. L'ensemble $X_2 = \{x \in X_1, x \geq u_1\}$ étant non vide et majoré par v_1 , le lemme 1.7 nous dit aussi qu'il existe $u_2 \in X_2$ et un majorant $v_2 \in \mathbb{K}$ de X_2 tels $v_2 \leq v_1$

et $0 \leq v_2 - u_2 < \frac{1}{2}$. Supposons construits pour $n \geq 2$, $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n$ dans X_1 et $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que pour tout k compris entre 2 et n , v_k soit un majorant de $X_k = \{x \in X, x \geq u_{k-1}\}$ et $0 \leq v_k - u_k < \frac{1}{k}$. L'ensemble $X_{n+1} = \{x \in X, x \geq u_n\} \subset X_n$ est alors non vide majoré par v_n , donc le lemme 1.7 nous dit qu'il existe $u_{n+1} \in X_{n+1}$ et un majorant $v_{n+1} \in \mathbb{K}$ de X_n tels $v_{n+1} \leq v_n$ et $0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{n+1}$. Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont alors adjacentes et en conséquence convergent vers une même limite M . De plus v_1 majore X et pour $n \geq 2$, v_n qui majore $X_n = \{x \in X, x \geq u_{n-1}\}$ majore aussi X (pour $x \in X$, on a soit $x \geq u_{n-1}$ et $x \leq v_n$, soit $x \leq u_{n-1} \leq v_n$), donc $M = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ majore X . Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$ il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $M - \varepsilon < u_{n_\varepsilon}$ (on a aussi $M = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$), donc $M - \varepsilon$ ne majore pas X . Au final M est la borne supérieure de X . ■

Du théorème précédent, on déduit que dans un corps totalement ordonné archimédien et complet tout élément positif admet une racine carrée. Précisément, on a le résultat suivant.

Corollaire 1.3. *Soit $\mathbb{K}$ un corps totalement ordonné archimédien et complet. Pour tout $y \in \mathbb{K}^+$, il existe $x \in \mathbb{K}$ tel que $y = x^2$.*

Démonstration Pour $y \in \mathbb{K}^+$, l'ensemble $E = \{z \in \mathbb{K}^+, z^2 \leq y\}$ est non vide (il contient 0) et majoré par $\max(1, y)$ (pour $0 \leq y \leq 1$ et $z > 1$, on a $z^2 > 1$ et $z \notin E$, donc $E \subset [0, 1]$; pour $y > 1$ et $z > y$, on a $z^2 > y^2 > y$ et $z \notin E$, donc $E \subset [0, y]$), donc cet ensemble admet une borne supérieure $x \in \mathbb{K}^+$ (comme $0 \in E$, on a $x \geq 0$). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe par définition de la borne supérieure un élément x_n de E tel que $x - \frac{1}{n} < x_n \leq x$, donc :

$$x^2 < \left(\frac{1}{n} + x_n\right)^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{2x_n}{n} + x_n^2 \leq \frac{1}{n^2} + \frac{2x}{n} + y$$

et faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $x^2 \leq y$ (dans $\mathbb{K}$ archimédien, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$). Si $x^2 < y$, de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2$, on déduit que pour n assez grand on aura $\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 < y$, soit que $x + \frac{1}{n} \in E$ avec $x = \sup(E)$, ce qui est impossible. Au final, on a $x^2 = y$. ■

Pour $y = 0$, l'unique solution de $x^2 = y$ est 0 et pour $y > 0$, on a deux solutions x et $-x$ ($x^2 = z^2$ équivaut à $(z - x)(z + x) = 0$, soit à $z = \pm x$). La solution positive x de l'équation $y = x^2$ est la *racine carrée* de y notée $\sqrt{y}$.

De l'existence de la racine carrée, on déduit que tout morphisme de corps $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$ entre deux corps totalement ordonnés archimédiens et complets est croissant dans le sens où $x \leq y$ dans $\mathbb{K}$ entraîne $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ dans $\mathbb{L}$. En effet, comme $y - x$ est positif, il existe $z \in \mathbb{K}^+$ tel que $y - x = z^2$, ce qui implique que $\varphi(y) - \varphi(x) = \varphi(y - x) = \varphi(z^2) = (\varphi(z))^2 \in \mathbb{L}^+$ (lemme 1.1). Un tel isomorphisme est dit *isomorphisme de corps ordonnés*.

1.5 Une construction du corps des réels

L'ensemble $Z(\mathbb{Q})$ des suites de nombres rationnels qui convergent vers 0 étant un idéal de l'anneau $\text{Ca}(\mathbb{Q})$ des suites de Cauchy de nombres rationnels (lemme 1.4), on peut définir l'anneau quotient $\frac{\text{Ca}(\mathbb{Q})}{Z(\mathbb{Q})}$, cet anneau étant commutatif et unitaire. On notera $\bar{r}$ la classe d'équivalence d'une suite $r = (r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ca}(\mathbb{Q})$ modulo l'idéal $Z(\mathbb{Q})$. On rappelle qu'une suite $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ca}(\mathbb{Q})$ est dans la classe d'équivalence $\bar{r}$ si, et seulement si, la suite $(s_n - r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. On rappelle également que les opérations d'addition et de multiplication sur $\frac{\text{Ca}(\mathbb{Q})}{Z(\mathbb{Q})}$ sont définies par $\bar{r} + \bar{s} = \overline{r + s}$ et $\bar{r} \cdot \bar{s} = \overline{r \cdot s}$ pour $r = (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\text{Ca}(\mathbb{Q})$, où $r + s = (r_n + s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $r \cdot s = (r_n s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Lemme 1.8 *L'ensemble $\text{Ca}(\mathbb{Q}) \setminus Z(\mathbb{Q})$ des suites de Cauchy de nombres rationnels non convergentes vers 0 est contenu dans l'ensemble des suites de Cauchy de rationnels qui ne s'annulent jamais à partir d'un certain rang.*

Démonstration Soit $r = (r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ca}(\mathbb{Q}) \setminus Z(\mathbb{Q})$. Comme $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, il existe $\varepsilon_0 \in \mathbb{Q}^{+,*}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\varphi(n) \geq n$ tel que $|r_{\varphi(n)}| \geq 2\varepsilon_0$. La suite r étant de Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|r_n - r_m| < \varepsilon_0$ pour tout $m \geq n \geq n_0$. Dans le cas où $r_{\varphi(n_0)} \geq 2\varepsilon_0$, on a $r_m > r_{\varphi(n_0)} - \varepsilon_0 \geq \varepsilon_0 > 0$ pour tout $m \geq n_0$ et dans le cas où $r_{\varphi(n_0)} \leq -2\varepsilon_0$, on a $r_m < r_{\varphi(n_0)} + \varepsilon_0 \leq -\varepsilon_0 < 0$ pour tout $m \geq n_0$, ce qui nous dit que dans tous les cas on a $|r_m| > \varepsilon_0 > 0$ pour tout $m \geq n_0$. ■

La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, ne s'annule jamais, mais ce n'est pas un élément de $\text{Ca}(\mathbb{Q}) \setminus Z(\mathbb{Q})$.

Théorème 1.15.

L'anneau quotient $\frac{\text{Ca}(\mathbb{Q})}{Z(\mathbb{Q})}$ est un corps commutatif.

Démonstration Il s'agit de vérifier que tout élément non nul de l'anneau $\frac{\text{Ca}(\mathbb{Q})}{Z(\mathbb{Q})}$ est inversible, ce qui signifie que si $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de nombres rationnels qui ne converge pas vers 0, il existe alors une suite de Cauchy $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels telle que la suite $(r_n s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit équivalente à la suite constante égale à 1 modulo l'idéal $Z(\mathbb{Q})$, ce qui signifie que $(r_n s_n - 1)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Le lemme 1.8 nous dit qu'il existe $\varepsilon_0 \in \mathbb{Q}^{+,*}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels $|r_n| > \varepsilon_0 > 0$ pour tout $n \geq n_0$. Il en résulte que pour tout $n \geq n_0$ et tout $m \geq n_0$, on a $\left|\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_m}\right| = \frac{|r_n - r_m|}{|r_n| |r_m|} \leq \frac{|r_n - r_m|}{\varepsilon_0^2}$, ce qui implique que la suite $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $s_n = 0$ pour $n < n_0$ et $s_n = \frac{1}{r_n}$ pour $n \geq n_0$ est de Cauchy telle que $r_n s_n = 1$ pour tout $n \geq n_0$, donc telle que $(r_n s_n - 1)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. ■

Le corps $\frac{\text{Ca}(\mathbb{Q})}{Z(\mathbb{Q})}$ est noté $\mathbb{R}$ et on dit que c'est le *corps des réels*. Un réel x est donc la classe d'équivalence d'une suite $r = (r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ca}(\mathbb{Q})$ modulo l'idéal $Z(\mathbb{Q})$.

L'application qui associe à un nombre rationnel r la classe d'équivalence de la suite constante égal à r dans $\mathbb{R}$ ($\bar{r}$ est l'ensemble de toutes les suites rationnelles de Cauchy qui converge vers r) réalise une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, ce qui permet d'identifier $\mathbb{Q}$ à un sous-corps de $\mathbb{R}$. Le corps $\mathbb{R}$ est donc de caractéristique nulle.

Un élément de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dit *irrationnel*.

L'exercice 1.4 nous donne un exemple de nombres réel (i. e. un élément de $\frac{\text{Ca}(\mathbb{Q})}{Z(\mathbb{Q})}$) qui est irrationnel, à savoir la classe d'équivalence de la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

1.6 Le corps totalement ordonné $\mathbb{R}$

On peut munir $\mathbb{R}$ d'une relation d'ordre total prolongeant celle de $\mathbb{Q}$ et compatible avec la structure de corps. Pour ce faire, on note $\text{Ca}^+(\mathbb{Q})$ [resp. $\text{Ca}^-(\mathbb{Q})$] l'ensemble des suites de Cauchy de nombres rationnels $r = (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}^{+,*}$ il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $r_n \geq -\varepsilon$ [resp. $r_n \leq \varepsilon$] pour tout $n \geq n_\varepsilon$.

Reprenant la preuve du lemme 1.8, on vérifie que l'ensemble $\text{Ca}^+(\mathbb{Q}) \setminus Z(\mathbb{Q})$ [resp. $\text{Ca}^-(\mathbb{Q}) \setminus Z(\mathbb{Q})$] est contenu dans l'ensemble des suites de Cauchy de rationnels qui sont à valeurs strictement positives [resp. à valeurs strictement négatives] à partir d'un certain rang.

Lemme 1.9 On a $\text{Ca}^+(\mathbb{Q}) \cap \text{Ca}^-(\mathbb{Q}) = Z(\mathbb{Q})$ et $\text{Ca}(\mathbb{Q}) = \text{Ca}^+(\mathbb{Q}) \cup \text{Ca}^-(\mathbb{Q})$.

Démonstration Une suite $r = (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans $\text{Ca}^+(\mathbb{Q}) \cap \text{Ca}^-(\mathbb{Q})$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}^{+,*}$ il existe un entier naturel n_ε tel que $r_n \geq -\varepsilon$ et $r_n \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui équivaut à $|r_n| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et revient à dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$, soit que $r \in Z(\mathbb{Q})$. On a donc l'égalité $\text{Ca}^+(\mathbb{Q}) \cap \text{Ca}^-(\mathbb{Q}) = Z(\mathbb{Q})$. Soit $r = (r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ca}(\mathbb{Q})$. Si $r \in Z(\mathbb{Q})$, elle est alors dans $\text{Ca}^+(\mathbb{Q})$ et dans $\text{Ca}^-(\mathbb{Q})$. Sinon, avec la démonstration du lemme 1.8 on a vu qu'il existe un entier n_0 tel que les r_n sont tous non nuls et de même signe à partir du rang n_0 . Dans le cas où $r_n > 0$ [resp. $r_n < 0$] pour tout $n \geq n_0$, on a $r_n \geq -\varepsilon$ [resp. $r_n \leq -\varepsilon$] pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}^{+,*}$ et tout $n \geq n_0$, soit $r \in \text{Ca}^+(\mathbb{Q})$ [resp. $r \in \text{Ca}^-(\mathbb{Q})$]. ■

Le lemme qui suit nous dit que la définition de $\text{Ca}^+(\mathbb{Q})$ [resp. de $\text{Ca}^-(\mathbb{Q})$] est compatible avec la relation d'équivalence modulo $Z(\mathbb{Q})$.

Lemme 1.10 Soit $r = (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\text{Ca}^+(\mathbb{Q})$ [resp. dans $\text{Ca}^-(\mathbb{Q})$]. Toute suite $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ca}(\mathbb{Q})$ équivalente à r modulo $Z(\mathbb{Q})$ est également dans $\text{Ca}^+(\mathbb{Q})$ [resp. dans $\text{Ca}^-(\mathbb{Q})$].

Démonstration Pour $r \in \text{Ca}^+(\mathbb{Q})$ et $s \in \bar{r}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - r_n) = 0$, donc pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}^{+,*}$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $r_n \geq -\frac{\varepsilon}{2}$ et $|s_n - r_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui nous donne $s_n = r_n + s_n - r_n \geq r_n - |s_n - r_n| \geq -\varepsilon$ pour

tout $n \geq n_\varepsilon$ et signifie que $s \in \text{Ca}^+(\mathbb{Q})$. On procède de manière analogue pour $r \in \text{Ca}^-(\mathbb{Q})$. ■

Le lemme précédent légitime la définition qui suit.

Définition 1.13. Un réel $x = \bar{r}$ est dit positif [resp. négatif] si $r \in \text{Ca}^+(\mathbb{Q})$ [resp. $r \in \text{Ca}^-(\mathbb{Q})$].

En notant π la surjection canonique de $\text{Ca}(\mathbb{Q})$ sur $\frac{\text{Ca}(\mathbb{Q})}{Z(\mathbb{Q})}$, l'ensemble des réels positif [resp. des réels négatif] est $\mathbb{R}^+ = \pi(\text{Ca}^+(\mathbb{Q}))$ [resp. $\mathbb{R}^- = \pi(\text{Ca}^-(\mathbb{Q}))$].

Définition 1.14. Soient x, y deux réels. On dit que x est inférieur ou égal à y , si $y - x \in \mathbb{R}^+$, ce que l'on note $x \leq y$.

Théorème 1.16.

La relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$ compatible avec les opérations d'addition et de multiplication ($\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné).

Démonstration Il nous suffit de vérifier que l'ensemble $P = \mathbb{R}^+$ vérifie les conditions (1.1) du théorème 1.2. On a $-\text{Ca}^+(\mathbb{Q}) = \text{Ca}^-(\mathbb{Q})$, donc :

$$P \cap (-P) = \pi(\text{Ca}^+(\mathbb{Q}) \cap \text{Ca}^-(\mathbb{Q})) = \pi(Z(\mathbb{Q})) = \{\bar{0}\}$$

De $\text{Ca}(\mathbb{Q}) = \text{Ca}^+(\mathbb{Q}) \cup \text{Ca}^-(\mathbb{Q})$, on déduit que :

$$P \cup (-P) = \pi(\text{Ca}^+(\mathbb{Q}) \cup \text{Ca}^-(\mathbb{Q})) = \pi(\text{Ca}(\mathbb{Q})) = \mathbb{R}$$

Du fait que $\text{Ca}^+(\mathbb{Q}) + \text{Ca}^+(\mathbb{Q}) = \text{Ca}^+(\mathbb{Q})$, on déduit que :

$$P + P = \pi(\text{Ca}^+(\mathbb{Q}) + \text{Ca}^+(\mathbb{Q})) = \pi(\text{Ca}^+(\mathbb{Q})) = \mathbb{R}^+$$

Il reste enfin à montrer que $P \cdot P \subset P$. Soient donc x, y dans P . Si $x = 0$ ou $y = 0$, on a alors $xy = 0 \in P$. Si x et y sont non nuls, ils sont alors représentés par $r = (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\text{Ca}^+(\mathbb{Q}) \setminus Z(\mathbb{Q})$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $r_n > 0, s_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}^{+,*}$, on a $r_n s_n > 0 > -\varepsilon$, ce qui nous dit que $xy \in P$. ■

La relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ prolonge bien celle que l'on connaît sur $\mathbb{Q}$. En effet, pour $r \leq s$ sur $\mathbb{Q}$, on a $s - r \in \mathbb{Q}^+ \subset \text{Ca}^+(\mathbb{Q})$, donc $\bar{s} - \bar{r} = \overline{s - r} \in \mathbb{R}^+$ et $\bar{r} \leq \bar{s}$ dans $\mathbb{R}$.

Sur le corps totalement ordonné $\mathbb{R}$ on peut donc définir la valeur absolue par $|x| = \max(x, -x)$.

Lemme 1.11 Pour tout réel $x = \bar{r}$, où $r = (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de nombres rationnels, on a $|x| = \overline{|r|}$ où on a noté $|r| = (|r_n|)_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration La suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, il en est de même de la suite $(|r_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ (théorème 1.11). Précisément, cette suite est dans $\text{Ca}^+(\mathbb{Q})$. Si $r \in Z(\mathbb{Q})$, on a alors $x = 0$ et $|r| \in Z(\mathbb{Q})$ (théorème 1.9), donc $|x| = \bar{0} = \overline{|r|}$. Si $r \in \text{Ca}^+(\mathbb{Q}) \setminus Z(\mathbb{Q})$, il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $r_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$, donc $|r_n| - r_n = 0$ pour tout $n \geq n_0$ et $\overline{|r|} - r \in Z(\mathbb{Q})$, soit $|x| = x = \bar{r} = \overline{|r|}$ (x est positif car $r \in \text{Ca}^+(\mathbb{Q})$, donc $|x| = x$). Si $r \in \text{Ca}^-(\mathbb{Q}) \setminus Z(\mathbb{Q})$, il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $r_n < 0$ pour tout $n \geq n_0$, donc $|r_n| + r_n = 0$ pour tout $n \geq n_0$ et $\overline{|r|} + r \in Z(\mathbb{Q})$, soit $|x| = -x = \overline{-r} = \overline{|r|}$ (x est négatif car $r \in \text{Ca}^-(\mathbb{Q})$, donc $|x| = -x$). ■

Théorème 1.17.

Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels est archimédien.

Démonstration Soient $a \in \mathbb{R}^{+,*}$, $b \in \mathbb{R}^+$ et $r = (r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ca}(\mathbb{Q})$ un représentant du réel $\frac{b}{a}$. La suite r qui est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ est bornée dans ce corps, ce qui signifie qu'il existe un rationnel $M = \frac{p}{q}$ où $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $-M \leq r_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(M - r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels positifs étant dans $\text{Ca}^+(\mathbb{Q})$, le réel $M - \frac{b}{a}$ qu'elle représente est positif, donc $M = \frac{p}{q} \geq \frac{b}{a}$, soit $pa \geq qb \geq b$ et $(p+1)a > b$. ■

Du théorème 1.12 et du précédent, on déduit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

On en déduit également que pour tout réel x il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$, cet entier n est la partie entière de x .

Théorème 1.18.

Toute suite de Cauchy de nombres rationnels converge dans $\mathbb{R}$.

Démonstration Soit $r = (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de nombres rationnels, c'est-à-dire un élément de $\text{Ca}(\mathbb{Q})$ et $x = \bar{r}$ le réel qu'elle représente. Nous allons montrer que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou plus précisément $(\bar{r}_n)_{n \in \mathbb{N}}$) converge vers x dans $\mathbb{R}$. Pour tout $\delta \in \mathbb{Q}^{+,*}$, il existe $n_\delta \in \mathbb{N}$ tel que $|r_m - r_n| < \delta$ pour tout $n \geq n_\delta$ et tout $m \geq n_\delta$ dans $\mathbb{N}$. Pour $m \geq n_\delta$ donné, on a $x - \bar{r}_m = \overline{r - r_m} = \overline{(r_n - r_m)_{n \in \mathbb{N}}}$ et $|x - \bar{r}_m| = \overline{|(r_n - r_m)_{n \in \mathbb{N}}|} = \overline{(|r_m - r_n|)_{n \in \mathbb{N}}} < \delta$ (on a $\delta - |r_m - r_n| > 0$ pour tout $n \geq n_\delta$, donc $(\delta - |r_m - r_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans $\text{Ca}^+(\mathbb{Q})$). Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$, il existe $\delta_\varepsilon \in \mathbb{Q}^{+,*}$ tel que $0 < \delta < \varepsilon$ et $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|x - \bar{r}_m| < \delta < \varepsilon$ pour tout $m \geq n_\varepsilon$, ce qui nous dit que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{r}_n$ dans $\mathbb{R}$. ■

Théorème 1.19.

Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels est complet.

Démonstration Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ un rationnel $r_n \in \mathbb{Q}$ tel que $|u_n - r_n| < \frac{1}{n+1}$. Pour tous $m > n$ dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} |r_m - r_n| &\leq |r_m - u_m| + |u_m - u_n| + |u_n - r_n| \\ &\leq \frac{1}{m+1} + |u_m - u_n| + \frac{1}{n+1} \leq \frac{2}{n+1} + |u_m - u_n| \end{aligned}$$

ce qui implique que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels est de Cauchy, donc convergente vers un réel ℓ . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a alors :

$$|\ell - u_n| \leq |\ell - r_n| + |r_n - u_n| \leq |\ell - r_n| + \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

c'est-à-dire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans $\mathbb{R}$. ■

En résumé, on a le résultat suivant.

Théorème 1.20.

Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels est totalement ordonné, archimédien et complet.

De ce théorème et du théorème 1.14, on déduit les propriétés suivantes de $\mathbb{R}$:

- pour tout réel x il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$ ($n = [x]$ est la *partie entière* de x) ;
- tout réel strictement positif admet deux racines carrées opposées (remarque après le corollaire 1.3) ;
- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$;
- toute partie non vide et majorée [resp. minorée] de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure [resp. une borne inférieure].

Les résultats sur les suites d'éléments d'un corps totalement ordonné sont bien entendu valables pour les suites réelles. En résumé, on a les résultats suivants :

- toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite ;
- $|u_n - \ell| \leq \varepsilon_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ entraînent $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$ entraîne $\lim_{n \rightarrow +\infty} (|u_n|) = |\ell|$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) > \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$ entraîne $u_n > v_n$ à partir d'un certain rang ;
- $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang entraîne $\ell \leq \ell'$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$ et $u_n \leq w_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang entraînent $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n) = \ell$;
- de toute suite réelle, on peut extraire une sous-suite monotone ;
- une suite de Cauchy réelle est convergente si, et seulement si, on peut en extraire une sous-suite convergente.

Avec de plus le caractère archimédien et complet de $\mathbb{R}$, on a les résultats suivants :

- toute suite réelle croissante majorée [resp. minorée] est convergente ;
- **théorème des suites adjacentes** : deux suites réelles adjacentes convergent vers la même limite ;
- **théorème des segments emboîtés** : pour toute suite $([u_n, v_n])_{n \in \mathbb{N}}$ de segments emboîtés dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$, il existe un unique réel ℓ tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [u_n, v_n] = \{\ell\}$;
- **théorème de Bolzano-Weierstrass** : de toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Le théorème des segments emboîtés peut être utilisé pour montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 1.21.

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration Il suffit de montrer que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable. Dans le cas contraire, il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$. En coupant $I = [0, 1]$ en trois segments de même longueur, il en existe un que l'on note I_0 qui ne contient pas $\varphi(0)$. On coupe ensuite I_0 en trois segments de même longueur en notant I_1 l'un de ces segments qui ne contient pas $\varphi(1)$. Par récurrence, on construit ainsi une suite de segments emboîtés $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n ne contient pas $\varphi(n)$ et I_n est de longueur $\frac{1}{3^n}$, on déduit alors du théorème des segments emboîtés que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x\}$ avec $x \in [0, 1]$ et $x \neq \varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit la définition de φ . ■

Parmi les suites réelles divergentes, on traite à part celles qui tendent vers l'infini.

Définition 1.15. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ [resp. vers $-\infty$], si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall n \geq n_0, u_n > M$$

$$[\text{resp. } \forall m \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall n \geq n_0, u_n < m]$$

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ [resp. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$].

Une suite qui tend vers l'infini (i. e. vers $+\infty$ ou $-\infty$) est non bornée donc divergente. Une suite qui tend vers $+\infty$ [resp. vers $-\infty$] est nécessairement positive [resp. négative] à partir d'un certain rang.

Si $u_n = \frac{1}{v_n}$ avec $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ si, et seulement si, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

1.7 Unicité du corps des réels

Un corps de nombres réels totalement ordonné archimédien et complet, peut être construit de diverses manières. On peut utiliser les coupures de Dedekind (voir [4]) ou les nombres décimaux (voir [7]). Le corps obtenu est dans tous les cas isomorphe à celui que nous avons obtenu à partir des suites de Cauchy de nombres rationnels. Pour prouver ce résultat, nous aurons besoin du lemme qui suit.

Lemme 1.12 *L'identité est l'unique morphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans lui même.*

Démonstration Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un morphisme du corps, il est alors impair (puisque un morphisme de groupes additifs est impair) et croissant (conséquence du corollaire 1.3). De $f(1) = 1$, on déduit par récurrence sur n que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En écrivant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que $1 = f\left(n \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$, on déduit que $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$. Il en résulte que pour tout rationnel positif $r = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a $f(r) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q}$. Enfin avec l'impairité de f , on déduit que ce dernier résultat est encore vrai pour les rationnels négatifs. On a donc $f(r) = r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ on peut trouver pour tout réel x et tout $n \in \mathbb{N}^*$ des rationnels r_n et s_n tels que $x - \frac{1}{n} < r_n < x < s_n < x + \frac{1}{n}$, ce qui nous donne par croissance de f , $f(x) - \frac{1}{n} \leq r_n \leq s_n \leq f(x) + \frac{1}{n}$ et faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $f(x) = x$. ■

Théorème 1.22.

Si $\mathbb{K}$ est un corps totalement ordonné archimédien et complet, il existe alors un unique isomorphisme de corps ordonnés de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration On rappelle que le sous-corps premier d'un corps totalement ordonné est identifié à $\mathbb{Q}$.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif totalement ordonné archimédien et complet. Du caractère archimédien de $\mathbb{K}$, on déduit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{K}$ (théorème 1.12), donc pour tout $x \in \mathbb{K}$ il existe une suite $r = (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels telle que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$ dans $\mathbb{K}$. Si $r' = (r'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une autre suite de nombres rationnels qui converge vers x , la suite $r' - r$ est de limite nulle, donc dans $Z(\mathbb{Q})$ et on a $\bar{r} = \bar{r}'$ dans $\mathbb{R} = \frac{\text{Ca}(\mathbb{Q})}{Z(\mathbb{Q})}$ (les suites r et r' qui sont convergentes sont de Cauchy). On peut donc définir l'application $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \bar{r}$ et on vérifie facilement que c'est un morphisme de corps et comme tout morphisme de corps, il est injectif (son noyau est un idéal strict de $\mathbb{K}$ car φ est non nul et le seul idéal

strict d'un corps est $\{0\}$). Un tel morphisme est également croissant. Pour tout $y = \bar{r} \in \mathbb{R}$ où $r \in \text{Ca}(\mathbb{Q})$, la suite r de nombres rationnels qui est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ l'est également dans $\mathbb{K}$. En effet, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, il existe $\delta \in \mathbb{Q}^{+,*}$ tel que $0 < \delta < \varepsilon$ (densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{K}$) et $n_\delta \in \mathbb{N}$ tel que $|r_m - r_n| < \delta < \varepsilon$ pour tous les entiers $m > n > n_\delta$. Comme $\mathbb{K}$ est complet, la suite r converge dans $\mathbb{K}$ vers un élément x qui est tel que $y = \varphi(x)$. Le morphisme φ est donc surjectif et c'est un isomorphisme de corps ordonnés de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{R}$. Si ψ est un isomorphisme de corps de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{R}$, la composée $\varphi \circ \psi^{-1}$ est alors un morphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans lui-même, soit l'identité d'après le lemme 1.12, ce qui signifie que $\psi = \varphi$. ■

1.8 Exercices

Exercice 1.1. Montrer qu'un corps algébriquement clos ne peut être totalement ordonné.

Solution. Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos et i une racine du polynôme $X^2 + 1 = 0$. Supposons que $\mathbb{K}$ soit totalement ordonné. Dans le cas où $i \geq 0$ [resp. où $i \leq 0$], on a $0 = 0 \cdot i \leq i^2 = -1$ [resp. $-i \geq 0$ et $0 = 0 \cdot (-i) \leq (-i)^2 = -1$] et $1 = 1 + 0 \leq 1 + (-1) = 0$, ce qui est impossible.

Exercice 1.2. Soient A, B deux parties non vides d'un corps totalement ordonné $\mathbb{K}$ admettant des bornes inférieure et supérieure. Montrer que $-A$, $A \cup B$ et $A + B$ admettent des bornes inférieure et supérieure et qu'on a :

$$\begin{cases} \sup(-A) = -\inf(A), \inf(-A) = -\sup(A) \\ \sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B)), \inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B)) \\ A \subset B \Rightarrow \inf(B) \leq \inf(A) \text{ et } \sup(A) \leq \sup(B) \\ \sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B), \inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B) \end{cases}$$

Solution.

1. Pour tout $y = -x \in -A$ où $x \in A$, on a $-y \geq \inf(A)$, soit $y \leq -\inf(A)$, ce qui nous dit que $-\inf(A)$ est un majorant de $-A$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, il existe $x \in A$ tel que $\inf(A) \leq x < \inf(A) + \varepsilon$, donc $-x \in -A$ est tel que $-\inf(A) - \varepsilon < -x \leq -\inf(A)$ et $-\inf(A)$ est la borne supérieure de $-A$. De manière analogue, on vérifie que $-\sup(A)$ est la borne inférieure de $-A$.
2. On suppose que $\max(\sup(A), \sup(B)) = \sup(B)$ (l'ordre est total). Pour tout $x \in A \cup B$, on a soit $x \in A$ et $x \leq \sup(A) \leq \sup(B)$, soit $x \in B$ et $x \leq \sup(B)$, donc $\sup(A \cup B) \leq \sup(B)$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, il existe $x \in B \subset A \cup B$ tel que $\sup(B) - \varepsilon < x \leq \sup(B)$, donc $\sup(A \cup B) = \sup(B)$. On montre de manière analogue que $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.
3. Pour tout $x \in A \subset B$, on a $\inf(B) \leq x \leq \sup(B)$, ce qui entraîne par définition des bornes inférieure et supérieure que $\inf(B) \leq \inf(A)$ et $\sup(A) \leq \sup(B)$.
4. Notons $M = \sup(A)$ et $M' = \sup(B)$. Pour tout $z = x + y$ avec $(x, y) \in A \times B$, on a $z \leq M + M'$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, on peut trouver $x \in A$ et $y \in B$ tels

que $M - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq M$ et $M' - \frac{\varepsilon}{2} < y \leq M'$, donc $z = x + y \in A + B$ est tel que $M + M' - \varepsilon < z \leq M + M'$. Le réel $M + M'$ est donc la borne supérieure de $A + B$. De manière analogue, on vérifie que $\inf(A) + \inf(B)$ est la borne inférieure de $A + B$.

Exercice 1.3. Montrer que le sous-ensemble $X = \{r \in \mathbb{Q}, r^2 < 2\}$ de $\mathbb{Q}$ est non vide et majoré, mais n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ muni de l'ordre usuel.

Solution. Il est clair que X est non vide (par exemple $0 \in X$) et majoré (pour $r \in X$, on a $r \leq 2$ car $r > 2$ donne $r^2 > 4$). Si X admet une borne supérieure $M \in \mathbb{Q}$, on a alors $M \geq 1$ (car $1 \in X$) et pour tout entier $n \geq 1$, il existe $r \in X$ tel que $0 \leq M - \frac{1}{n} < r \leq M$, donc $\left(M - \frac{1}{n}\right)^2 < r^2 < 2$, ce qui nous donne $M^2 - 2 < \frac{2M}{n} - \frac{1}{n^2}$. Faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $M^2 \leq 2$. D'autre part, comme M est majorant de X , on a $M + \frac{1}{n} \notin X$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\left(M + \frac{1}{n}\right)^2 \geq 2$ et faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $M^2 \geq 2$. Au final, on a $M \in \mathbb{Q}$ et $M^2 = 2$, ce qui n'est pas possible. En effet, en écrivant $M = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers naturels non nuls premiers entre eux, on a $p^2 = 2q^2$ qui entraîne que p est pair, soit $p = 2p_1$ et $q^2 = 2p_1^2$ entraîne q pair, ce qui contredit le fait que p et q sont premiers entre eux.

Exercice 1.4. Montrer que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels est de Cauchy, mais non convergente dans $\mathbb{Q}$.

Solution. On vérifie facilement que cette suite est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Pour $m > n > 2$, on a :

$$\begin{aligned} |r_m - r_n| &= \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2) \cdots (m-1)m}\right) \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{m-n-1} \frac{1}{(n+2)^k} \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)^2 n!} \leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

ce qui implique que $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Supposons qu'elle soit convergente vers un rationnel $r = \frac{p}{q}$ où p, q sont deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Pour tout $n > q$, le nombre $p_n = n!(r - r_n) = n! \lim_{m \rightarrow +\infty} (r_m - r_n)$ est un entier strictement positif avec $0 < n!(r - r_n) \leq \frac{n+2}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{2}$ pour $m > n \geq 2$,

ce qui implique $0 < p_n < 1$ dans $\mathbb{N}$, soit une impossibilité. La suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc non convergente dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 1.5. Soit $(\mathbb{K}, \leq)$ un corps totalement ordonné. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on note :

$$d(P) = \begin{cases} 0 & \text{si } P = 0 \\ a_n & \text{si } P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ est de degré } n \end{cases}$$

On écrit toute fraction rationnelle R dans $\mathbb{K}(X)$ sous la forme $R = \frac{P}{Q}$ avec P, Q dans $\mathbb{K}[X]$ et Q non nul unitaire. On définit la relation $\leq$ sur $\mathbb{K}(X)$ par :

$$\left(\frac{P_1}{Q_1} \leq \frac{P_2}{Q_2} \right) \Leftrightarrow (d(Q_1 P_2 - P_1 Q_2) \geq 0)$$

Montrer que cette relation est bien définie et que $(\mathbb{K}(X), \leq)$ un corps totalement ordonné non archimédien.

Solution.

- Pour vérifier que la relation $\leq$ est bien définie, il s'agit de montrer que sa définition ne dépend pas des choix des numérateurs et dénominateurs des fractions rationnelles concernées. Soient $R_1 = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{U_1}{V_1}$ et $R_2 = \frac{P_2}{Q_2} = \frac{U_2}{V_2}$ dans $\mathbb{K}(X)$. Supposons que $d(Q_1 P_2 - P_1 Q_2) \geq 0$. Les polynômes $Q_1 Q_2$ et $V_1 V_2$ étant unitaires, on a compte tenu des égalités $P_1 V_1 = U_1 Q_1$ et $P_2 V_2 = U_2 Q_2$:

$$\begin{aligned} d(V_1 U_2 - V_2 U_1) &= d(Q_1 Q_2 (V_1 U_2 - V_2 U_1)) = d(Q_1 V_1 U_2 Q_2 - Q_2 V_2 U_1 Q_1) \\ &= d(Q_1 V_1 P_2 V_2 - Q_2 V_2 P_1 V_1) \\ &= d(V_1 V_2 (Q_1 P_2 - P_1 Q_2)) = d(Q_1 P_2 - P_1 Q_2) \geq 0 \end{aligned}$$

La relation $\leq$ est donc bien définie.

- Cette relation est d'ordre. En effet, on a :

- $\frac{P}{Q} \leq \frac{P}{Q}$ car $d(0) = 0$;
- si $\frac{P_1}{Q_1} \leq \frac{P_2}{Q_2}$ et $\frac{P_2}{Q_2} \leq \frac{P_3}{Q_3}$, on a alors $0 \leq d(Q_1 P_2 - P_1 Q_2) \leq 0$, donc $Q_1 P_2 - P_1 Q_2 = 0$, soit $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$;
- si $\frac{P_1}{Q_1} \leq \frac{P_2}{Q_2}$ et $\frac{P_2}{Q_2} \leq \frac{P_3}{Q_3}$ alors

$$\begin{cases} d(Q_3 (Q_1 P_2 - P_1 Q_2)) = d(Q_1 P_2 - P_1 Q_2) \geq 0 \\ d(Q_1 (Q_2 P_3 - P_2 Q_3)) = d(Q_2 P_3 - P_2 Q_3) \geq 0 \end{cases}$$

(Q_1 et Q_2 sont unitaires) et en ajoutant on obtient :

$$d(Q_1 P_3 - P_1 Q_3) = d(Q_2 (Q_1 P_3 - P_1 Q_3)) \geq 0$$

(la somme de deux polynômes de coefficient dominant positif est un polynôme de même nature), ce qui équivaut à $\frac{P_1}{Q_1} \leq \frac{P_3}{Q_3}$.

3. L'ordre est total puisqu'il est total sur $\mathbb{K}$.
4. Si $\frac{P_1}{Q_1} \leq \frac{P_2}{Q_2}$ et $\frac{P_3}{Q_3} \in \mathbb{K}(X)$, on a alors $\frac{P_j}{Q_j} + \frac{P_3}{Q_3} = \frac{P_j Q_3 + P_3 Q_j}{Q_j Q_3}$ pour $j = 1, 2$ et :

$$\begin{aligned} & d(Q_1 Q_3 (P_2 Q_3 + P_3 Q_2) - Q_2 Q_3 (P_1 Q_3 + P_3 Q_1)) \\ &= d(Q_1 (P_2 Q_3 + P_3 Q_2) - Q_2 (P_1 Q_3 + P_3 Q_1)) \\ &= d(Q_1 P_2 Q_3 - Q_2 P_1 Q_3) = d(Q_1 P_2 - Q_2 P_1) \geq 0 \end{aligned}$$

De même pour $\frac{P_3}{Q_3} \geq 0$, on a $\frac{P_j}{Q_j} \frac{P_3}{Q_3} = \frac{P_j P_3}{Q_j Q_3}$ pour $j = 1, 2$ et :

$$d(P_2 P_3 Q_1 Q_3 - P_1 P_3 Q_2 Q_3) = d(P_3) d(P_2 Q_1 - P_1 Q_2) \geq 0$$

puisque $d(P_3) \geq 0$. L'ordre est donc bien compatible avec la structure de corps de $\mathbb{K}(X)$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $d(X - n) = 1 > 0$, donc $X > n$, soit $\frac{1}{n} > \frac{1}{X}$ avec $\frac{1}{X}$ dans $(\mathbb{K}(X))^{+,*}$. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne peut donc converger vers 0 et en conséquence, $\mathbb{K}(X)$ n'est pas archimédien.

Chapitre 2

Espaces métriques

Pour ce chapitre, E est un ensemble non vide.

2.1 Distances, espaces métriques et topologie

Définition 2.1. Une *distance* sur E est une application $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tous x, y, z dans E , on ait :

- $d(x, y) = 0$ si, et seulement si, $y = x$ (propriété de séparation) ;
- $d(y, x) = d(x, y)$ (propriété de symétrie) ;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*inégalité triangulaire*).

Le couple (E, d) est un *espace métrique*.

Une distance sur E est nécessairement à valeurs positives. En effet, pour tout $(x, y) \in E^2$ on a $0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$, donc $d(x, y) \geq 0$.

Exemples 2.1

- La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ [resp. le module sur $\mathbb{C}$] induit une distance en posant $d(x, y) = |y - x|$ pour tous x, y dans $\mathbb{R}$ [resp. dans $\mathbb{C}$]. Sauf précision contraire, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ seront munis de cette distance.
- Sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ l'application $d : (x, y) \mapsto |\arctan(y) - \arctan(x)|$ en convenant que $\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$, définit une distance qui est bornée (on a $d(x, y) \leq \pi$ pour tous x, y dans $\overline{\mathbb{R}}$).
- Si d est une distance sur E et Y est une partie non vide de E , la restriction de d à Y^2 définit alors une distance sur Y (distance induite).
- Si f est une fonction de E dans $\mathbb{R}$, l'application $d_f : (x, y) \mapsto |f(y) - f(x)|$ est une distance sur E si, et seulement si, f est injective (exercice 2.1).
- Si $n \geq 2$ est un entier et $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$ sont des espaces métriques, alors les applications δ_∞ et δ_1 définies sur le produit cartésien $E = \prod_{k=1}^n E_k$

en posant $\delta_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} d_k(x_k, y_k)$ et $\delta_1(x, y) = \sum_{k=1}^n d_k(x_k, y_k)$ pour tous

$x = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $y = (y_k)_{1 \leq k \leq n}$ dans E sont des distances sur E .

- En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit des distances sur $\mathbb{R}^n$ en posant :

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |y_k - x_k| \text{ et } d_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |y_k - x_k|$$

pour tous $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $y = (y_k)_{1 \leq k \leq n}$ dans $\mathbb{R}^n$.

- Sur l'ensemble $E = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ des suites réelles à valeurs dans $[0, 1]$ (le cube de Hilbert) en se donnant une série à termes réels strictement positifs $\sum \alpha_n$ convergente (voir le chapitre 4), l'application qui associe à toute couple (x, y)

d'éléments de E le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |y_n - x_n|$ définit une distance bornée (pour

toutes suites x, y dans E , on a $d(x, y) \leq 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$).

De l'inégalité triangulaire, on déduit que pour tous x, y, z dans un espace métrique (E, d) , on a $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$ (deuxième inégalité triangulaire). Cela résulte de $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ et $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z)$. On en déduit aussi par récurrence que si $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite de $n \geq 2$ points de E ,

on a alors $d(x_1, x_n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} d(x_k, x_{k+1})$ (inégalité polygonale).

Définition 2.2. Deux distances d et d' sur E sont dites *équivalentes*, s'il existe deux constantes réelles α et β strictement positives telles que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \alpha d(x, y) \leq d'(x, y) \leq \beta d(x, y)$$

On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des distances de E .

Pour la suite de ce paragraphe, (E, d) est un espace métrique que l'on notera simplement E quand il n'y a pas d'ambiguïté, la distance d étant donnée.

Définition 2.3. Pour toute partie non vide A de E et tout $x \in E$, on définit respectivement le *diamètre* de A et la *distance* de x à A par :

$$\delta(A) = \sup_{(x, y) \in A^2} d(x, y), \quad d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

On convient que $\delta(\emptyset) = 0$.

$d(x, A)$ est un élément de $\mathbb{R}^+$ (borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0) et $\delta(A)$ est un élément $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Pour tout $x \in A$, on a $d(x, A) = 0$, mais la réciproque est fautive. Par exemple pour $A =]0, 1] \subset \mathbb{R}$, on a $d(0, A) = 0$ et $0 \notin A$ (voir aussi le théorème 2.7).

Définition 2.4. On dit qu'une partie non vide A de E est *bornée*, si son diamètre $\delta(A)$ est fini.

On vérifie facilement que pour toute partie non vide A de E et tous points x, y dans E , on a $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

Pour tout $a \in E$ et tout $r \in \mathbb{R}^{+,*}$, on note

$$B(a, r) = \{x \in E, d(x, a) < r\}, \quad \overline{B}(a, r) = \{x \in E, d(x, a) \leq r\}$$

L'ensemble $B(a, r)$ [resp. $\overline{B}(a, r)$] est la *boule ouverte* [resp. la *boule fermée*] de centre a et de rayon r . La *sphère* de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$S(a, r) = \overline{B}(a, r) \setminus B(a, r) = \{x \in E, d(x, a) = r\}$$

Exemple 2.1 Sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels muni de la distance associée à la valeur absolue, les boules ouvertes [resp. fermées] sont les intervalles de la forme $]a - r, a + r[$ [resp. de la forme $[a - r, a + r]$]. De manière plus générale sur $\mathbb{R}^n$ muni de la distance d_∞ , les boules ouvertes [resp. les boules fermées] sont les pavés de la forme $\prod_{k=1}^n]a_k - r, a_k + r[$ [resp. les pavés de la forme $\prod_{k=1}^n [a_k - r, a_k + r]$].

Définition 2.5. On appelle *voisinage* d'un point a de E toute partie $\mathcal{V}$ de E qui contient une boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$.

Définition 2.6. Un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de E est dit *ouvert* s'il est vide ou non vide et voisinage de chacun de ses points, ce qui signifie que pour tout $x \in \mathcal{O}$ il existe $r_x \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $B(x, r_x) \subset \mathcal{O}$. Un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de E est dit *fermé* si son complémentaire $E \setminus \mathcal{F}$ est un ouvert.

Un ouvert non vide de E est une réunion de boules ouvertes : $\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} B(x, r_x)$.

Si $\mathcal{F}$ est un fermé non vide de E , un élément x de E appartient à l'ensemble $\mathcal{F}$ si, et seulement si, $d(x, \mathcal{F}) = 0$. En effet, pour $x \in \mathcal{F}$, on a $d(x, \mathcal{F}) = 0$ que $\mathcal{F}$ soit fermé ou pas. Si $x \notin \mathcal{F}$, il est alors dans l'ouvert $E \setminus \mathcal{F}$ et il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset E \setminus \mathcal{F}$, donc $\mathcal{F} \subset E \setminus B(x, \varepsilon)$ et pour tout $y \in \mathcal{F}$, on a $d(x, y) \geq \varepsilon$, ce qui implique que $d(x, \mathcal{F}) \geq \varepsilon > 0$.

Exemples 2.2

- L'ensemble vide et E sont à la fois ouverts et fermés dans E .
- Une boule ouverte [resp. une boule fermée] de E est un ouvert [resp. un fermé]. En effet, pour tout $x \in B(a, r)$, on a $r' = r - d(a, x) > 0$ et $B(x, r') \subset B(a, r)$ (on a $d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < r' + d(x, a) = r$ pour tout $y \in B(x, r')$). De même pour $x \in E \setminus \overline{B}(a, r)$, on a $r' = d(a, x) - r > 0$ et $B(x, r') \subset E \setminus \overline{B}(a, r)$ (on a $d(y, a) \geq d(x, a) - d(x, y) > d(a, x) - r' = r$ pour tout $y \in B(x, r')$).

- Tout intervalle ouvert [resp. fermé] de $\mathbb{R}$ est un ouvert [resp. un fermé].
- Un intervalle $[a, b[$ où $a < b$ sont deux réels, n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.
- Sur $\mathbb{R}^n$ muni de la distance d_∞ , un pavé ouvert $\prod_{k=1}^n]a_k, b_k[$ [resp. un pavé fermé $\prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$] est un ouvert [resp. un fermé].
- Pour toute partie non vide A de E et tout réel strictement positif r , l'ensemble $\mathcal{V}_r(A) = \{x \in E, d(x, A) < r\}$ est un ouvert qui contient A . En effet, il est clair que $\mathcal{V}_r(A)$ contient A (on a $d(x, A) = 0$ pour $x \in A$) et pour tout x dans $\mathcal{V}_r(A)$, on a $r' = r - d(x, A) > 0$ et $B(x, r') \subset \mathcal{V}_r(A)$ (pour $y \in B(x, r')$ on a $d(y, A) \leq d(y, x) + d(x, A) < r' + d(x, A) = r$).

Théorème 2.1.

Une réunion quelconque d'ouverts et une intersection finie d'ouverts sont des ouverts de E . Une réunion finie de fermés et une intersection quelconque de fermés sont des fermés de E .

Démonstration Si $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque d'ouverts non vides (les $\mathcal{O}_i$ vides peuvent être supprimés de la réunion) et x un élément de $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$, il existe alors un réel $r_{i_0} > 0$ tel que $B(x, r_{i_0}) \subset \mathcal{O}_{i_0} \subset \mathcal{O}$, donc $\mathcal{O}$ est ouvert. Si $(\mathcal{O}_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille finie d'ouverts non vides (le cas où l'un des $\mathcal{O}_k$ est vide est trivial) et x un élément de $\mathcal{O} = \bigcap_{k=1}^n \mathcal{O}_k$, il existe alors des réel $r_k > 0$, tels que $B(x, r_k) \subset \mathcal{O}_k$ pour tout k compris entre 1 et n . Le réel $r = \min_{1 \leq k \leq n} r_k$ est alors strictement positif et $B(x, r) \subset \bigcap_{k=1}^n B(x, r_k) \subset \mathcal{O}$, donc $\mathcal{O}$ est ouvert.

Le résultat sur les fermés s'en déduit par passage au complémentaire. ■

Une intersection infinie d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert comme le montre l'exemple de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ qui est fermé non ouvert.

De manière plus générale, l'intersection de toutes les boules ouvertes de centre a , $\bigcap_{r \in \mathbb{R}^+, * } B(a, r) = \{a\}$ n'est pas ouverte dans E .

Une réunion infinie de fermés n'est pas nécessairement un fermé comme le montre l'exemple de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, +\infty \right[=]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui est ouvert non fermé.

Ces deux exemples sont des cas particuliers du théorème qui suit.

Théorème 2.2.

Tout fermé de E peut s'écrire comme l'intersection d'une suite décroissante d'ouverts et tout ouvert peut s'écrire comme la réunion d'une suite croissante de fermés.

Démonstration Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble fermé de E . Pour tout entier naturel non nul n , l'ensemble $\mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(\mathcal{F}) = \left\{x \in E, d(x, \mathcal{F}) < \frac{1}{n}\right\}$ est un ouvert qui contient $\mathcal{F}$ (voir les exemples 2.2) et on a $\mathcal{F} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(\mathcal{F})$. En effet, comme $\mathcal{F}$ est contenu dans tous les $\mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(\mathcal{F})$, il est contenu dans l'intersection et pour tout $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(\mathcal{F})$, on a $d(x, \mathcal{F}) = 0$, ce qui équivaut à dire que $x \in \mathcal{F}$ car $\mathcal{F}$ est fermé. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{V}_{\frac{1}{n+1}}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(\mathcal{F})$, ce qui signifie que la suite $(\mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(\mathcal{F}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Par passage au complémentaire, on a le résultat annoncé sur les ouverts :

$$E \setminus \mathcal{O} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(E \setminus \mathcal{O}) \text{ et } \mathcal{O} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (E \setminus \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(E \setminus \mathcal{O}))$$

avec $E \setminus \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(E \setminus \mathcal{O}) = \left\{x \in E, d(x, E \setminus \mathcal{O}) \geq \frac{1}{n}\right\}$. ■

Théorème 2.3.

Pour toute partie non vide Y de E , les ouverts [resp. les fermés] de (Y, d) sont les ensembles de la forme $\mathcal{O} \cap Y$ [resp. $\mathcal{F} \cap Y$] où $\mathcal{O}$ [resp. $\mathcal{F}$] est un ouvert [resp. un fermé] de E (ouverts et fermés pour la topologie induite).

Démonstration Pour l'ensemble vide c'est clair.

Si $\mathcal{O}'$ est un ouvert non vide de (Y, d) , on a alors $\mathcal{O}' = \bigcup_{x \in \mathcal{O}'} B_Y(x, r_x)$ où on a noté $B_Y(x, r_x) = \{y \in Y, d(y, x) < r_x\} = B(x, r_x) \cap Y$, ce qui nous donne $\mathcal{O}' = \left(\bigcup_{x \in \mathcal{O}'} B(x, r_x)\right) \cap Y = \mathcal{O} \cap Y$ où $\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}'} B(x, r_x)$ est ouvert dans E comme réunion d'ouverts. Réciproquement si $\mathcal{O} \neq \emptyset$ est ouvert dans E et $x \in \mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap Y$, il existe alors $r_x \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $B(x, r_x) \subset \mathcal{O}$ et $B_Y(x, r_x) = B(x, r_x) \cap Y$ est une boule ouverte de (Y, d) contenue dans $\mathcal{O}'$, ce qui nous dit que $\mathcal{O}'$ est ouvert dans (Y, d) . Un fermé $\mathcal{F}'$ de (Y, d) s'écrit $\mathcal{F}' = Y \setminus \mathcal{O}'$ où $\mathcal{O}'$ est un ouvert de (Y, d) , donc $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap Y$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert de E et $\mathcal{F}' = Y \setminus (\mathcal{O} \cap Y) = (E \setminus \mathcal{O}) \cap Y = \mathcal{F} \cap Y$ où $\mathcal{F} = E \setminus \mathcal{O}$ est un fermé de E . Réciproquement, si $\mathcal{F} = E \setminus \mathcal{O}$ est un fermé de E où $\mathcal{O}$ est un ouvert de E , alors $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cap Y = (E \setminus \mathcal{O}) \cap Y = Y \setminus (\mathcal{O} \cap Y)$ est un fermé de (Y, d) . ■

Un ouvert pour la topologie induite dans (Y, d) n'est pas nécessairement ouvert dans (E, d) . Par exemple Y est ouvert dans (Y, d) , mais pas obligatoirement dans

(E, d) . Pour un exemple moins trivial, on peut considérer $]1, 2]$ qui est ouvert dans $Y =]0, 2]$ et pas dans $\mathbb{R}$. Dans le cas où Y est un ouvert de E , les ouverts de (Y, d) pour la topologie induite le sont dans (E, d) .

Sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels muni de la distance associée à la valeur absolue, on a le résultat suivant.

Théorème 2.4.

Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts.

Démonstration Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ ($\emptyset$ est l'intervalle ouvert $]a, a[$ pour n'importe quel réel a). Comme $\mathcal{O}$ est ouvert, pour tout $x \in \mathcal{O}$ il existe un réel $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) =]x - r_x, x + r_x[\subset \mathcal{O}$ et pour $n_x \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n_x} < r_x$ ($\mathbb{R}$ est archimédien), on a $]x - \frac{1}{n_x}, x + \frac{1}{n_x}[\subset \mathcal{O}$. De la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on déduit que l'intervalle $]x - \frac{1}{2n_x}, x + \frac{1}{2n_x}[$ contient un nombre rationnel q_x et on a $x - \frac{1}{2n_x} < q_x < x + \frac{1}{2n_x}$, soit $q_x - \frac{1}{2n_x} < x < q_x + \frac{1}{2n_x}$ ou encore $x \in]q_x - \frac{1}{2n_x}, q_x + \frac{1}{2n_x}[$, ce dernier intervalle étant contenu dans $]x - \frac{1}{n_x}, x + \frac{1}{n_x}[\subset \mathcal{O}$ puisque $x + \frac{1}{n_x} - (q_x + \frac{1}{2n_x}) = x + \frac{1}{2n_x} - q_x > 0$ et $q_x - \frac{1}{2n_x} - (x - \frac{1}{n_x}) = q_x - (x - \frac{1}{2n_x}) > 0$. On a donc au final en désignant par φ l'application qui associe à tout $x \in \mathcal{O}$ un couple (n_x, q_x) , l'égalité $\mathcal{O} = \bigcup_{(n,q) \in \varphi(\mathcal{O})}]q - \frac{1}{2n}, q + \frac{1}{2n}[$, l'ensemble d'indices $\varphi(\mathcal{O}) \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ étant dénombrable. ■

De manière plus générale sur $\mathbb{R}^n$ muni de la distance d_∞ , on a le résultat qui suit.

Théorème 2.5.

Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est réunion dénombrable de pavés ouverts.

Démonstration Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathcal{O}$ il existe un réel $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) = \prod_{k=1}^n]x_k - r_x, x_k + r_x[\subset \mathcal{O}$ et pour $n_x \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n_x} < r_x$, on a $\prod_{k=1}^n]x_k - \frac{1}{n_x}, x_k + \frac{1}{n_x}[\subset \mathcal{O}$ pour tout entier k compris entre 1 et n . Chaque intervalle $]x_k - \frac{1}{2n_x}, x_k + \frac{1}{2n_x}[$ contient un nombre rationnel $q_{x,k}$ et on a $x_k \in]q_{x,k} - \frac{1}{2n_x}, q_{x,k} + \frac{1}{2n_x}[\subset]x_k - \frac{1}{n_x}, x_k + \frac{1}{n_x}[$ pour

tout k compris entre 1 et n , soit :

$$x \in \prod_{k=1}^n \left[q_{x,k} - \frac{1}{2n_x}, q_{x,k} + \frac{1}{2n_x} \right] \subset \prod_{k=1}^n \left[x_k - \frac{1}{n_x}, x_k + \frac{1}{n_x} \right] \subset \mathcal{O}$$

et en désignant par φ l'application qui associe à tout $x \in \mathcal{O}$ un couple (n_x, q_x) où $q_x = (q_{x,k})_{1 \leq k \leq n}$, on a $\mathcal{O} = \bigcup_{(n,q) \in \varphi(\mathcal{O})} B\left(q_x, \frac{1}{2n}\right)$ où $\varphi(\mathcal{O}) \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Q}^n$ est dénombrable. ■

Définition 2.7. Soit A une partie de E . L'intérieur de A noté $\overset{\circ}{A}$, est le plus grand ouvert de E contenu dans A . L'adhérence de A notée $\overline{A}$, est le plus petit fermé de E contenant A . La frontière de A notée ∂A est l'intersection de $\overline{A}$ et $\overline{E \setminus A}$.

On vérifie facilement que l'intérieur de A est aussi la réunion de tous les ouverts de E contenus dans A et que l'adhérence de A est l'intersection de tous les fermés de E qui contiennent A .

Un point x de E est dans $\overset{\circ}{A}$ si, et seulement si, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$. En effet, si $x \in \overset{\circ}{A}$ il existe alors $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset \overset{\circ}{A} \subset A$. Réciproquement s'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$, la boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ est un ouvert de E contenu dans A et qui contient x , donc est contenue dans $\overset{\circ}{A}$ et $x \in \overset{\circ}{A}$.

L'adhérence d'une boule ouverte dans un espace métrique n'est pas nécessairement la boule fermée, c'est-à-dire que $\overline{B(x, r)} \neq \overline{B}(x, r)$. Par exemple si d est la distance discrète définie sur un ensemble E ayant au moins deux éléments par $d(x, x) = 0$ et $d(x, y) = 1$ pour $x \neq y$, on a pour tout $x \in E$, $B(x, 1) = \{x\}$, $\overline{B(x, 1)} = \{x\}$ et $\overline{B}(x, 1) = E$. Nous verrons au chapitre 3 que dans le cas particulier d'un espace normé, on a l'égalité $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$.

Théorème 2.6.

Pour tout sous-ensemble A de E on a $\overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{\circ}{A}$, $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$, $\overline{\overset{\circ}{E \setminus A}} = E \setminus \overline{A}$ et $\overset{\circ}{A} \subset A$ [resp. $A \subset \overline{A}$], cette dernière égalité étant réalisée si, et seulement si, A est ouvert [resp. A est fermé].

Démonstration L'ensemble $E \setminus \overset{\circ}{A}$ est un fermé qui contient $E \setminus A$ ($\overset{\circ}{A}$ est ouvert et $\overset{\circ}{A} \subset A$, donc $E \setminus \overset{\circ}{A}$ est fermé et $E \setminus A \subset E \setminus \overset{\circ}{A}$), ce qui implique que $\overline{E \setminus A} \subset E \setminus \overset{\circ}{A}$. Si F est un fermé qui contient $E \setminus A$, alors $E \setminus F$ est un ouvert contenu dans A , donc dans $\overset{\circ}{A}$ et F contient $E \setminus \overset{\circ}{A}$, donc $E \setminus \overset{\circ}{A}$ est le plus petit fermé qui contient $E \setminus A$, soit l'adhérence de ce dernier ensemble. Au final, on a $\overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{\circ}{A}$ et

$\partial A = \overline{A} \cap \left(E \setminus \overset{\circ}{A} \right) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. En posant $B = E \setminus A$, on a $\overline{A} = \overline{E \setminus B} = E \setminus \overset{\circ}{B}$, soit $E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{B} = \widehat{E \setminus A}$. Par définition, on a $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \subset A$ où $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ est la famille de tous les ouverts de E contenus dans A . L'égalité $A = \overset{\circ}{A}$ nous dit que A est ouvert comme réunion d'ouverts. Réciproquement si A est ouvert, c'est alors l'un des $\mathcal{O}_i$ et nécessairement on a $A \subset \overset{\circ}{A}$, ce qui donne l'égalité $A = \overset{\circ}{A}$. De même, on a $A \subset \overline{A} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{F}_j$ où $(\mathcal{F}_j)_{j \in J}$ est la famille de tous les fermés de E qui contiennent A . L'égalité $A = \overline{A}$ nous dit que A est fermé comme intersection de fermés. Réciproquement si A est fermé, c'est alors l'un des $\mathcal{F}_j$ et nécessairement on a $\overline{A} = \bigcap_{j \in I} \mathcal{F}_j \subset A$, ce qui donne l'égalité $A = \overline{A}$. ■

Théorème 2.7.

L'adhérence d'une partie A de E est l'ensemble des éléments x de E tels que $d(x, A) = 0$, ce qui revient à dire que $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $y \in A$ tel que $d(x, y) < \varepsilon$ (soit que $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$).

Démonstration Il revient au même de montrer que $d(x, A) > 0$ si, et seulement si, $x \in E \setminus \overline{A}$. Si $\delta = d(x, A) > 0$, on a alors $d(x, y) \geq \delta$ pour tout $y \in A$ et $E \setminus B(x, \delta)$ est un fermé qui contient A , donc $\overline{A} \subset E \setminus B(x, \delta)$ et en conséquence, $B(x, \delta) \subset E \setminus \overline{A}$, donc $x \in E \setminus \overline{A}$. Réciproquement, si $x \in E \setminus \overline{A}$, comme cet ensemble est ouvert, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset E \setminus \overline{A}$, donc $A \subset \overline{A} \subset E \setminus B(x, \varepsilon)$ et on a $d(x, y) \geq \varepsilon$ pour tout $y \in A$, ce qui implique que $d(x, A) \geq \varepsilon > 0$. ■

Du théorème précédent, on déduit que $x \in \partial A$ si, et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ et $B(x, \varepsilon) \setminus A \neq \emptyset$.

Définition 2.8. On dit qu'une partie D de E est *dense* dans E si $\overline{D} = E$, ce qui signifie que pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in D$ tel que $d(x, y) < \varepsilon$ (soit que $D \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$).

Dire que D est dense dans E revient aussi à dire que $\widehat{E \setminus D} = E \setminus \overline{D} = \emptyset$.

Une partie D de $\mathbb{R}$ est dense si, et seulement si, pour tous réels $x < y$, on a $D \cap]x, y[\neq \emptyset$.

Définition 2.9. On dit que l'espace métrique E est *séparable* s'il existe dans E une partie dense dénombrable.

Exemple 2.2 De la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ muni de la distance d_∞ est séparable : $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}^n$.

2.2 Suites à valeurs dans un espace métrique

(E, d) est un espace métrique que l'on désignera simplement par E .

Une suite d'éléments de E (ou à valeurs dans E) est une application définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) et à valeurs dans E . On se limite aux suites définies sur $\mathbb{N}$ et on note $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une telle suite.

Définition 2.10. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est *bornée*, si $\sup_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} d(u_n, u_m)$ est fini.

Dire qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée revient à dire que l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est borné dans E (définition 2.4).

Définition 2.11. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est *convergente*, s'il existe un élément ℓ de E tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(u_n, \ell) = 0$. Une suite non convergente est dite *divergente*.

La convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ dans E se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} ; \forall n \geq n_\varepsilon, d(u_n, \ell) < \varepsilon \quad (2.1)$$

Dans l'assertion (2.1), les deux dernières inégalités peuvent être strictes ou larges. Il est parfois commode de se limiter à $\varepsilon \in]0, 1[$ sans que cela ne soit restrictif et la condition $d(u_n, \ell) < \varepsilon$ peut être remplacée par $d(u_n, \ell) < \alpha \varepsilon$ où $\alpha \in \mathbb{R}^{+,*}$ est donné.

Cette notion de convergence dépend de la distance choisie sur E (exercice 2.3).

En utilisant l'inégalité triangulaire, on vérifie facilement que si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est convergente, sa limite est alors unique, ce qui nous permet de noter $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ou $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Une suite convergente est bornée. En effet, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, il existe alors un entier n_ε tel que $d(u_n, u_m) \leq d(u_n, \ell) + d(u_m, \ell) < 2$ pour tous $n > n_\varepsilon$ et $m > n_\varepsilon$, donc $\sup_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} d(u_n, u_m) \leq \max \left(\max_{0 \leq n, m \leq n_\varepsilon} d(u_n, u_m), 2 \right)$.

Définition 2.12. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est *de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} ; \forall n \geq n_\varepsilon, \forall m \geq n_\varepsilon, d(u_n, u_m) < \varepsilon$$

Les entiers m et n jouant des rôles symétriques, on peut se limiter à $m > n \geq n_\varepsilon$ dans la définition précédente.

Le résultat suivant est souvent utilisé pour montrer qu'une suite est de Cauchy.

Théorème 2.8.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E pour laquelle il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs et un entier n_0 vérifiant :

$$\begin{cases} \forall m > n \geq n_0, d(u_m, u_n) \leq \varepsilon_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (\varepsilon_n) = 0 \end{cases}$$

elle est alors de Cauchy.

Démonstration De $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\varepsilon_n) = 0$, on déduit que pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver un entier $n_\varepsilon \geq n_0$ tel que $\varepsilon_n < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui entraîne $d(u_m, u_n) < \varepsilon$ pour tous $m > n \geq n_\varepsilon$. ■

Théorème 2.9.

Toute suite de Cauchy dans E est bornée et toute suite convergente est de Cauchy.

Démonstration La première affirmation est une conséquence directe de la définition et la deuxième se déduit de l'inégalité triangulaire. ■

Dans le cas où toute suite de Cauchy dans E est convergente, on dit que l'espace métrique E est *complet*.

Exemple 2.3 Le point 6 du théorème 1.14 nous dit que $\mathbb{R}$ est complet. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la distance d_∞ est complet.

Les notions d'intérieur et d'adhérence peuvent se définir de façon séquentielle dans un espace métrique.

Théorème 2.10.

Soit A une partie non vide de E .

1. L'intérieur de A est l'ensemble des points x de E tels que pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers x , il existe un entier n_0 tel que $x_n \in A$ pour tout $n \geq n_0$.
2. L'adhérence de A est l'ensemble des points x de E qui sont limites d'une suite de points de A .
3. La frontière de A est l'ensemble des points x de E qui sont limites d'une suite de points de A et d'une suite de points de $E \setminus A$.

Démonstration

1. Si $x \in \overset{\circ}{A}$, il existe alors un réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$ et pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers x , il existe un entier n_ε tel que $d(x_n, x) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui implique que $x_n \in A$. Si $x \notin \overset{\circ}{A}$, alors pour

tout entier $n \geq 1$, la boule $B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ n'est pas contenue dans A (comme $B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ est ouverte, si elle est contenue dans A , elle est aussi contenue dans $\overset{\circ}{A}$ et $x \in \overset{\circ}{A}$), donc il existe $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \setminus A$, ce qui nous donne une suite qui converge vers x avec tous ses termes en dehors de A . D'où la définition séquentielle de l'intérieur.

2. L'adhérence de A est $\overline{A} = \{x \in E, d(x, A) = 0\}$ (théorème 2.7), donc pour tout $x \in \overline{A}$ et tout entier $n \geq 1$, il existe $x_n \in A$ tel que $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$, ce qui nous donne une suite de points de A qui converge vers x . Réciproquement si x est la limite d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans A , des encadrements $0 \leq d(x, A) \leq d(x_n, x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que $d(x, A) = 0$, soit que $x \in \overline{A}$.

3. Il en résulte que $x \in \partial A = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$ si, et seulement si, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A et une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $E \setminus A$ telles que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$. ■

De ce théorème, on peut déduire des définitions séquentielles des notions d'ouverts, de fermés et de partie dense :

- un ensemble $\mathcal{O}$ est ouvert dans E si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers $x \in \mathcal{O}$, il existe un entier n_0 tel que $x_n \in \mathcal{O}$ pour tout $n \geq n_0$ (cela résulte de $\mathcal{O} = \overset{\circ}{\mathcal{O}}$);
- un ensemble $\mathcal{F}$ est fermé dans E si, et seulement si, toute suite convergente d'éléments de $\mathcal{F}$ a sa limite dans $\mathcal{F}$ (cela résulte de $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}$);
- une partie A de E est dense dans E si, et seulement si, tout $x \in E$ est la limite d'une suite de points de A .

Définition 2.13. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On dit qu'un élément a de E est *valeur d'adhérence* de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il est limite d'une suite extraite, ce qui signifie qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)}$.

Dans le cas où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle, on dit que $-\infty$ [resp. $+\infty$] est valeur d'adhérence de cette suite, si on peut en extraire une sous-suite divergente vers $-\infty$ [resp. vers $+\infty$].

Théorème 2.11.

Un élément a de E est valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \geq n, d(u_m, a) < \varepsilon \quad (2.2)$$

Démonstration Si $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)}$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe alors un entier n_ε tel que $d(u_{\varphi(n)}, a) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p = \max(n_\varepsilon, n)$, on a $m = \varphi(p) \geq p$, donc $m \geq n$, $p \geq n_\varepsilon$ et $d(u_m, a) = d(u_{\varphi(p)}, a) < \varepsilon$. Réciproquement si $a \in E$ vérifie (2.2), on construit

alors par récurrence une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $d(u_{\varphi(n)}, a) < \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On part de $m = \varphi(0) \geq 0$ tel que $d(u_m, a) < 1$ et en supposant obtenus pour $n \geq 0$ des entiers $\varphi(0) < \dots < \varphi(n)$ tels que $d(u_{\varphi(k)}, a) < \frac{1}{k+1}$ pour tout k compris entre 0 et n , il existe un entier $m = \varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1$ tel que $d(u_m, a) < \frac{1}{n+2}$. On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(u_{\varphi(n)}, a) = 0$, ce qui signifie que a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. ■

Une suite peut être sans valeur d'adhérence comme le montre l'exemple de la suite réelle $(n)_{n \in \mathbb{N}}$. De manière plus générale, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E pour laquelle il existe un réel $r > 0$ tel $d(x_i, x_j) \geq r$ pour tous $i \neq j$ dans $\mathbb{N}$, il est alors impossible d'en extraire une suite convergente.

Théorème 2.12.

Une suite convergente dans E a pour unique valeur d'adhérence sa limite.

Démonstration Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'éléments de E convergente vers ℓ . Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $d(u_n, \ell) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, on a $\varphi(n) \geq n \geq n_\varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui entraîne que $d(u_{\varphi(n)}, \ell) < \varepsilon$. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente vers ℓ . ■

La réciproque du théorème précédent est fausse comme le montre l'exemple de la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{2n} = n$ et $u_{2n+1} = 0$ (elle est divergente avec 0 pour unique valeur d'adhérence), mais elle vraie pour une suite à valeurs dans un compact comme on le verra avec le théorème 2.17.

Théorème 2.13.

Une suite de Cauchy est convergente si, et seulement si, elle a une valeur d'adhérence.

Démonstration Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de Cauchy dans E . Si elle converge, sa limite est alors en particulier une valeur d'adhérence. Réciproquement si $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)}$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, un entier n_ε tel que $d(u_{\varphi(n)}, \ell) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe un entier $m_\varepsilon \geq n_\varepsilon$ tel que $d(u_n, u_m) < \varepsilon$ pour tous $m \geq n \geq m_\varepsilon$, ce qui nous donne pour tout entier $n \geq m_\varepsilon$:

$$d(u_n, \ell) \leq d(u_n, u_{\varphi(n)}) + d(u_{\varphi(n)}, \ell) < 2\varepsilon$$

(pour $n \geq m_\varepsilon$, on a $\varphi(n) \geq n \geq m_\varepsilon \geq n_\varepsilon$). La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente vers ℓ . ■

Étant donnée une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E , on note $\mathcal{A}$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \{u_k, k \geq n\}$ l'ensemble des valeurs de la suite $(u_k)_{k \geq n}$.

Théorème 2.14.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On a $\overline{R_n} = R_n \cup \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{R_n}$.

Démonstration Pour toute valeur d'adhérence $a = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_{\varphi(k)}$ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(k) \geq k$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{\varphi(k)})_{k \geq n}$ est à valeurs dans R_n et en conséquence sa limite a est dans $\overline{R_n}$. On a donc $\mathcal{A} \subset \overline{R_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comme $R_n \subset \overline{R_n}$, on a $R_n \cup \mathcal{A} \subset \overline{R_n}$. Tout $a \in \overline{R_n}$ est limite d'une suite de points $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de R_n . Si a est dans R_n , il est alors dans $R_n \cup \mathcal{A}$, sinon pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier k_ε tel que $0 < d(v_k, a) < \varepsilon$ pour tout $k \geq k_\varepsilon$. En écrivant chaque v_k sous la forme $v_k = u_{\psi(k)}$, on peut trouver pour tout $n \in \mathbb{N}$ un entier $k \geq k_\varepsilon$ tel que $m = \psi(k) > n$ (s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\psi(k) \leq n$ pour tout $k \geq k_\varepsilon$, la suite $(v_k)_{k \geq k_\varepsilon}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs et sa limite a est l'une de ces valeurs, donc dans R_n contrairement à notre hypothèse), ce qui nous donne $d(u_m, a) = d(v_k, a) < \varepsilon$. Du théorème 2.11 on déduit alors que a est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, soit $a \in \mathcal{A} \subset R_n \cup \mathcal{A}$. D'où l'égalité $\overline{R_n} = R_n \cup \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que l'ensemble $\mathcal{A}$ est contenu dans tous les $\overline{R_n}$, donc dans $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{R_n}$. Du théorème (2.11), on déduit que pour tout $a \in E \setminus \mathcal{A}$ il existe un réel $\varepsilon > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que $d(u_m, a) \geq \varepsilon$ pour tout $m \geq n$, ce qui implique que a n'est pas dans $\overline{R_n}$ et en conséquence, $a \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{R_n}$. D'où l'égalité $\mathcal{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{R_n}$. ■

Du théorème précédent, on déduit que l'ensemble $\mathcal{A}$ des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est fermé dans E comme intersection de fermés.

2.3 Compacité

Définition 2.14. On dit qu'une partie K de E est *compacte*, si de toute suite de points de K , on peut extraire une sous-suite qui converge dans K (*propriété de Bolzano-Weierstrass*).

La propriété de Bolzano-Weierstrass se traduit aussi en disant que toute suite de points de K admet une valeur d'adhérence dans K .

Dans le cas où E est compact, on dit que cet espace métrique est compact.

Définition 2.15. On dit qu'une partie A de E est *relativement compacte*, si son adhérence $\overline{A}$ est compacte.

Théorème 2.15.

Une partie non vide A de E est relativement compacte si, et seulement si, de toute suite de points de A , on peut extraire une sous-suite qui converge dans E .

Démonstration Si A est relativement compacte, alors toute suite de points de A étant également une suite de points du compact $\overline{A}$, on peut en extraire une sous-suite qui converge dans $\overline{A}$. Réciproquement, supposons que de toute suite de points de A , on peut extraire une sous-suite qui converge dans E . Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de points de $\overline{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in A$ tel que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ et de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de A on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers un élément y de $\overline{A}$. En écrivant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$d(y_{\varphi(n)}, y) \leq d(y_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, y) < \frac{1}{\varphi(n)} + d(x_{\varphi(n)}, y)$$

on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\varphi(n)} = y$ dans $\overline{A}$, ce qui nous dit que $\overline{A}$ est compact, soit que A est relativement compact. ■

Exemples 2.3

- Un segment $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est compact. En effet, le point 5 du théorème 1.14 nous dit que de toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $[a, b]$, on peut extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente (théorème de Bolzano-Weierstrass) et des encadrements $a \leq u_{\varphi(n)} \leq b$, on déduit que sa limite est dans $[a, b]$.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E convergente, on notant ℓ sa limite, l'ensemble $K = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est alors compact.
- Un fermé F dans un compact K de E est compact.
- Un sous-ensemble d'un ensemble relativement compact est relativement compact.

Lemme 2.1 Soit K un compact de E . Pour tout réel $r > 0$, il existe une suite finie $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'éléments de K telle que $K \subset \bigcup_{k=1}^n B(a_k, r)$, ce qui signifie que le compact K peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de même rayon donné.

Démonstration Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que K ne puisse être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon r et centrée en un point de K . Partant de $u_0 \in K$, il existe $u_1 \in K \setminus B(u_0, r)$ (puisque K n'est pas contenu dans $B(u_0, r)$), donc $d(u_0, u_1) \geq r$. Supposant obtenus $u_0, \dots, u_n$ dans K tels que $d(u_i, u_j) \geq r$ pour tous $i \neq j$ compris entre 1 et n , comme K n'est pas contenu dans $\bigcup_{k=1}^n B(u_k, r)$, il existe $u_{n+1} \in K$ tel que $d(u_{n+1}, u_k) \geq r$ pour tout k compris entre 1 et n . On construit donc ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que

$d(u_i, u_j) \geq r$ pour tous $i \neq j$ dans $\mathbb{N}$ et d'une telle suite il est impossible d'extraire une suite convergente, ce qui n'est pas possible pour K compact. ■

Le lemme précédent se traduit en disant qu'un compact est précompact.

Définition 2.16. On dit qu'une partie K de E est *précompacte*, si pour tout réel $r > 0$, K peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon r .

Un précompact peut également être recouvert par un nombre fini de boules fermées de rayon $r > 0$.

Un sous-ensemble précompact K de E est borné. En effet, si $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite finie d'éléments de K telle que $K \subset \bigcup_{k=1}^n B(a_k, 1)$, pour x, y dans K , il existe deux entiers j, k compris entre 1 et n tels que $x \in B(a_j, 1)$ et $y \in B(a_k, 1)$, donc :

$$d(x, y) \leq d(x, a_j) + d(a_j, a_k) + d(a_k, y) \leq M = 2 + \max_{1 \leq j, k \leq n} d(a_j, a_k)$$

et K est borné.

Exemples 2.4 *Un sous-ensemble relativement compact de E est précompact. Un sous-ensemble d'un précompact de E est précompact.*

Théorème 2.16.

Un compact de E est fermé, borné et séparable.

Démonstration Soit K un compact de E . Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K qui converge vers $\ell \in E$, on peut extraire une suite qui converge vers un élément de K , donc $\ell \in K$. L'ensemble K est donc fermé. Le lemme 2.1 nous dit que K est précompact, c'est-à-dire qu'il existe une suite finie $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'éléments de K telle que $K \subset \bigcup_{k=1}^n B(a_k, 1)$, donc pour tous x, y dans K il existe j, k compris entre 1 et n tels que $(x, y) \in B(a_j, 1) \times B(a_k, 1)$ et :

$$d(x, y) \leq d(x, a_j) + d(a_j, a_k) + d(a_k, y) < 2 + d(a_j, a_k) \leq 2 + \max_{1 \leq j, k \leq n} d(a_j, a_k)$$

ce qui nous dit que l'ensemble K est borné. Le lemme 2.1 nous dit aussi que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ il existe une suite finie $(a_{n,k})_{1 \leq k \leq m_n}$ d'éléments de K

telle que $K \subset \bigcup_{k=1}^{m_n} B(a_{n,k}, \frac{1}{2^n})$. On vérifie alors que l'ensemble dénombrable

$D = \{a_{n,k}, n \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq k \leq m_n\}$ est dense dans K . En effet, pour tout $x \in K$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{n_\varepsilon}} < \varepsilon$ et un entier m_ε tel que

$K \subset \bigcup_{k=1}^{m_\varepsilon} B\left(a_{n_\varepsilon, k}, \frac{1}{2^{n_\varepsilon}}\right)$, donc il existe un entier k compris entre 1 et m_ε tel que $d(x, a_{n_\varepsilon, k}) < \frac{1}{2^{n_\varepsilon}} < \varepsilon$, ce qui nous dit que D est dense dans K . ■

De manière générale, un fermé borné dans un espace métrique n'est pas nécessairement compact. Nous verrons au chapitre suivant que dans le cas particulier où E est un espace vectoriel normé, les compacts sont les fermés bornés si, et seulement si E est de dimension finie (théorème 3.16). Ce résultat pour $E = \mathbb{R}$ est une conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass. Voir aussi l'exercice 2.19.

Corollaire 2.1. *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés et les ensembles relativement compacts sont les bornés.*

Démonstration Le théorème précédent nous dit qu'un compact de $\mathbb{R}$ est fermé et borné. Réciproquement, si K est une partie bornée de $\mathbb{R}$, le théorème de Bolzano-Weierstrass nous dit que de toute suite de points de K , on peut extraire une sous-suite convergente et si de plus K est fermé, cette limite est alors dans K . Cet ensemble est donc compact. Le deuxième point en résulte immédiatement. ■

Théorème 2.17.

Soient K un compact de E et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K .

1. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a un nombre fini $a_1, \dots, a_r$ de valeurs d'adhérences, alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε tel que $u_n \in \bigcup_{k=0}^r \mathcal{B}(a_k, \varepsilon)$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$.
2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, elle a une unique valeur d'adhérence.

Démonstration Comme K est compact, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a au moins une valeur d'adhérence.

1. En notant $\mathcal{A}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on suppose que $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_r\}$. S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier

$p_n \geq n$ tel que $x_{p_n} \notin \bigcup_{k=0}^r \mathcal{B}(a_k, \varepsilon)$, soit $d(u_{p_n}, a_k) \geq \varepsilon$ pour tout k compris entre

1 et r , on peut alors construire par récurrence une suite $(\varphi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante d'entiers telle que $d(u_{\varphi(n)}, a_k) \geq \varepsilon$ pour tout k compris entre 1 et r et de cette suite dans le compact K , on peut extraire une sous suite $(u_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $a \in K$ tel que $d(a, a_k) \geq \varepsilon > 0$, donc a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui n'est pas dans $\mathcal{A}$, c'est impossible. D'où le résultat annoncé.

2. On sait déjà que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, elle a alors une unique valeur d'adhérence que cette suite soit à valeurs dans un compact ou pas (théorème 2.12). Réciproquement si $\mathcal{A} = \{\ell\}$, on déduit alors du premier point que pour tout $\varepsilon > 0$, il

existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in \mathcal{B}(\ell, \varepsilon)$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui revient à dire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ . ■

Lemme 2.2 (Lebesgue) Soient K un compact de E et $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de E telle que $K \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ (on dit qu'on a un recouvrement ouvert de K). Il existe un réel $r > 0$ tel que toute boule ouverte de centre $x \in K$ et de rayon r soit contenue dans l'un des $\mathcal{O}_i$.

Démonstration Supposons que pour tout réel $r > 0$, il existe une boule ouverte de centre $x \in K$ et de rayon r qui ne soit contenue dans aucun des $\mathcal{O}_i$. On peut alors trouver, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, une boule $B\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$ centrée en $x_n \in K$ qui ne soit contenue dans aucun des $\mathcal{O}_i$. De la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de K , on peut extraire une suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers $x \in K \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$. Cette limite étant dans l'un des ouverts $\mathcal{O}_i$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \mathcal{O}_i$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi(n)} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = x$, il existe un entier n_ε tel que $\frac{1}{\varphi(n)} < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(x_{\varphi(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, donc $B\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}\right) \subset B(x, r) \subset \mathcal{O}_i$ (pour $y \in B\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}\right)$, on a $d(x, y) \leq d(x, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\varphi(n)} < \varepsilon$), contrairement à l'hypothèse de départ. ■

Théorème 2.18.

Soit K une partie non vide de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. K est compact ;
2. de tout recouvrement ouvert de K , on peut extraire un sous-recouvrement fini (propriété de Borel-Lebesgue) ;
3. K est précompact et complet.

Démonstration

(1) $\Rightarrow$ (2) Soient K un compact de E et $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de E telle que $K \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$. Le lemme 2.2 de Lebesgue nous dit qu'il existe $r > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon r et de centre $x \in K$ est contenue dans l'un des $\mathcal{O}_i$ et le lemme 2.1 qu'il existe une suite finie $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'éléments de K telle que $K \subset \bigcup_{k=1}^n B(a_k, r)$ (K est précompact). Chaque boule $B(a_k, r)$ étant contenue dans un ouvert $\mathcal{O}_{i_k}$, on en déduit que $K \subset \bigcup_{k=1}^n \mathcal{O}_{i_k}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Réciproquement soit K une partie non vide de E telle que de tout recouvrement ouvert de K on puisse extraire un sous-recouvrement fini. S'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K sans valeur d'adhérence dans K , on peut alors trouver pour tout $x \in K$, un réel $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x)$ ne contienne qu'un nombre fini de valeurs de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Mais alors du recouvrement ouvert

$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r_x)$, on peut extraire un recouvrement fini $K \subset \bigcup_{k=1}^p B(a_j, r_{a_j})$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs qui en sont des valeurs d'adhérence, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ. L'ensemble K est donc compact.

(1) $\Rightarrow$ (3) Si K est compact dans E , le lemme 2.1 nous dit alors qu'il est précompact. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans le compact K , elle admet alors une valeur d'adhérence vers laquelle elle converge (théorème 2.13), cette limite étant dans K puisque cet ensemble est fermé. Le compact K est donc complet.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supposons que K non vide soit précompact et complet. On se donne une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K et nous allons construire par récurrence une suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de parties infinies de $\mathbb{N}$ et une suite $\left(B\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de boules ouvertes telles que $J_{n+1} \subset J_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous les u_j pour $j \in J_n$ soient dans la même boule $B\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right)$. L'ensemble K étant contenu dans une réunion finie de boules ouvertes de rayon $\frac{1}{2}$, il existe une partie infinie J_1 de $\mathbb{N}$ telle que tous les u_j pour $j \in J_1$ soient dans une même boule $B\left(x_1, \frac{1}{2}\right)$ (principe des tiroirs).

Supposant construites pour $n \in \mathbb{N}^*$ les suite $(J_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $\left(B\left(x_k, \frac{1}{2^k}\right)\right)_{1 \leq k \leq n}$ satisfaisant les conditions imposées. Comme K est contenu dans une réunion finie de boules ouvertes de rayon $\frac{1}{2^{n+1}}$, il existe une partie infinie J_{n+1} de J_n telle que tous les u_j pour $j \in J_{n+1}$ soient dans une même boule $B\left(x_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

On définit alors par récurrence la suite d'entiers $(\varphi(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ comme suit. Pour $n = 1$, $\varphi(1) = \min J_1$ et supposant construit $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\varphi(n+1)$ comme le plus petit élément de $J_{n+1} \cap [\varphi(n) + 1, +\infty[$ (cette partie de J_n est non vide car J_{n+1} est infini). La suite $(\varphi(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est alors strictement croissante et pour tous $m > n$ dans $\mathbb{N}^*$, $u_{\varphi(n)}$ et $u_{\varphi(m)}$ sont dans $B\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right)$ (on a $\varphi(m) \in J_m \subset J_n$) donc $d(u_{\varphi(m)}, u_{\varphi(n)}) \leq d(u_{\varphi(m)}, x_n) + d(x_n, u_{\varphi(n)}) < \frac{1}{2^{n-1}}$, ce qui implique que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans K donc convergente vers un élément de K puisque K est complet. ■

Par passage au complémentaire, on déduit du théorème précédent qu'un sous-ensemble K de E est compact si, et seulement si, de toute famille $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ de fermés dans K d'intersection vide, on peut extraire une sous-famille finie également d'intersection vide. Par contraposition, on en déduit que si $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ est une famille

de fermés dans K telle que toute intersection finie d'éléments de cette famille est non vide, alors $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est non vide.

Exemple 2.4 $\mathbb{R}$ est non compact car $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, +\infty[= \emptyset$ (ce qui résulte du caractère archimédien de $\mathbb{R}$), alors que pour toute famille finie J d'entiers naturels, l'intersection $\bigcap_{n \in J} [n, +\infty[= [\max(J), +\infty[$ est non vide.

Corollaire 2.2. Dans E complet, un sous-ensemble non vide est relativement compact si, et seulement si, il est précompact.

Corollaire 2.3. (Compacts emboîtés) Si $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts non vides dans E (i. e. telle que $K_{n+1} \subset K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est alors non vide. Dans le cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(K_n) = 0$, cette intersection est réduite à un point.

Démonstration La suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant décroissante, c'est une suite de compacts de K_0 . Si $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \emptyset$, on a alors $K_0 \subset E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E \setminus K_n$ et de ce recouvrement ouvert du compact K_0 on peut extraire un sous recouvrement fini $K_0 \subset \bigcup_{k=1}^m E \setminus K_{n_k}$, chaque ouvert $E \setminus K_{n_k}$ étant contenu dans $E \setminus K_r$, où $r = \max_{1 \leq k \leq m} n_k$ (pour tout k compris entre 1 et m , on a $K_r \subset K_{n_k}$), ce qui implique que $K_0 \subset E \setminus K_r$ avec $K_r \subset K_0$, donc $E \setminus K_0 \subset K_r \subset K_0$, ce qui est impossible pour K_0 non vide. Au final, on a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$. Si x, y sont deux points de cette intersection, on a alors $d(x, y) \leq \delta(K_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et dans le cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(K_n) = 0$, cela implique en faisant tendre n vers $+\infty$ que $d(x, y) = 0$, soit que $y = x$. Cette intersection est donc réduite à un point. ■

2.4 Le théorème de Baire

Avec le théorème 1.14 on a vu que la complétude de $\mathbb{R}$ équivaut à la propriété des intervalles emboîtés. De manière plus générale, on a le résultat suivant.

Théorème 2.19. Boules emboîtées

L'espace métrique E est complet si, et seulement si, pour toute suite décroissante $(\overline{B}(x_n, r_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de boules fermées (boules emboîtées) telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$, l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}(x_n, r_n)$ est réduite à un point.

Démonstration Supposons E complet et soit $(\overline{B}(x_n, r_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de boules fermées emboîtées. Pour tous $m > n$, on a $x_m \in \overline{B}(x_m, r_m) \subset \overline{B}(x_n, r_n)$, donc $d(x_m, x_n) \leq r_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$, ce qui implique que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente vers un élément x de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $d(x, x_n) \leq d(x, x_m) + d(x_m, x_n) \leq d(x, x_m) + r_n$ pour tout $m > n$, ce qui implique en faisant tendre m vers $+\infty$ que $d(x, x_n) \leq r_n$, soit que $x \in \overline{B}(x_n, r_n)$, donc $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}(x_n, r_n)$ et cette intersection est non vide. Si y est un autre point de cette intersection, on a alors $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \leq 2r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique en faisant tendre n vers $+\infty$ que $d(x, y) = 0$, soit que $y = x$. Cette intersection est donc réduite à $\{x\}$. Réciproquement, on suppose que la propriété des boules emboîtées est vérifiée et on se donne une suite de Cauchy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il existe un entier n_1 tel que $d(u_n, u_{n_1}) < \frac{1}{2}$ pour tout $n > n_1$. Supposant obtenus pour $r \in \mathbb{N}^*$, des entiers $n_1 < \dots < n_r$ tels que $d(u_n, u_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$ pour tout entier k compris entre 1 et r et tout entier $n > n_k$, il existe un entier $n_{r+1} > n_r$ tel que $d(u_n, u_{n_{r+1}}) < \frac{1}{2^{r+1}}$ pour tout entier $n > n_{r+1}$. La suite de boules fermées $\left(\overline{B}\left(u_{n_r}, \frac{1}{2^{r-1}}\right)\right)_{r \in \mathbb{N}^*}$ est alors décroissante. En effet pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \overline{B}\left(u_{n_{r+1}}, \frac{1}{2^r}\right)$, on a $d(x, u_{n_{r+1}}) \leq \frac{1}{2^r}$ et $d(u_{n_{r+1}}, u_{n_r}) \leq \frac{1}{2^r}$ car $n_{r+1} > n_r$, donc :

$$d(x, u_{n_r}) \leq d(x, u_{n_{r+1}}) + d(u_{n_{r+1}}, u_{n_r}) \leq 2\frac{1}{2^r} = \frac{1}{2^{r-1}}$$

soit $x \in \overline{B}\left(u_{n_r}, \frac{1}{2^{r-1}}\right)$. Il existe alors par hypothèse un élément x de E tel que $\bigcap_{r \in \mathbb{N}^*} \overline{B}\left(u_{n_r}, \frac{1}{2^{r-1}}\right) = \{x\}$ et des inégalités $d(x, u_{n_r}) \leq \frac{1}{2^{r-1}}$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on déduit que la suite $(u_{n_r})_{r \in \mathbb{N}^*}$ converge vers x , ce qui implique que x est aussi la limite de la suite de Cauchy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'après le théorème 2.13. L'espace métrique E est donc complet. ■

Une conséquence importante du théorème des boules emboîtées est le résultat qui suit.

Théorème 2.20. Baire

Soit (E, d) un espace métrique complet. Si $(\mathcal{O}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts denses dans E , l'intersection $\mathcal{O} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ est alors dense dans E .

Démonstration Il s'agit de montrer que pour tout $x \in E$ et tout réel $\varepsilon > 0$, on a $\mathcal{O} \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$. Soit donc $\mathcal{B} = B(x, \varepsilon) \subset E$. Du fait que l'ouvert $\mathcal{O}_0$ est dense dans E , on déduit que l'ouvert $\mathcal{B} \cap \mathcal{O}_0$ est non vide et on peut trouver une boule fermée $B_0 = \overline{B}(x_0, r_0)$ avec $r_0 \in]0, 1[$ telle que $B_0 \subset \mathcal{B} \cap \mathcal{O}_0$. En utilisant ensuite le fait que l'ouvert $\mathcal{O}_1$ est dense dans E , on déduit que l'ouvert $\mathcal{O}_1 \cap B(x_0, r_0)$ est non vide et on peut trouver une boule fermée $B_1 = \overline{B}(x_1, r_1)$ avec $r_1 \in]0, \frac{1}{2}[$ telle que $B_1 \subset \mathcal{O}_1 \cap B(x_0, r_0)$. En itérant ce procédé, on construit une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de boules fermées telle que :

$$B_n = \overline{B}(x_n, r_n) \text{ avec } r_n \in \left]0, \frac{1}{n+1}\right[, B_0 \subset \mathcal{B} \cap \mathcal{O}_0, B_{n+1} \subset \mathcal{O}_n \cap B(x_n, r_n)$$

En effet, supposant construites les boules fermées B_k , pour k compris entre 0 et n avec $n \geq 0$, en utilisant la densité de l'ouvert $\mathcal{O}_{n+1}$ dans E , on déduit que l'ouvert $\mathcal{O}_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$ est non vide et il existe une boule fermée $B_{n+1} = \overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1})$ avec $r_{n+1} \in \left]0, \frac{1}{n+2}\right[$ telle que $B_{n+1} \subset \mathcal{O}_n \cap B(x_n, r_n)$. La suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une suite de boules fermées emboîtées dans E telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$ et le théorème des boules emboîtées nous dit que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{y\}$. On a alors $y \in B_0 \subset \mathcal{B}$ et $y \in B_{n+1} \subset \mathcal{O}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $y \in \mathcal{O} \cap \mathcal{B}$ et cet ensemble est non vide. En conclusion, $\mathcal{O}$ est dense dans E . ■

Utilisant le fait qu'un ouvert $\mathcal{O}$ est dense dans E si, et seulement si, le fermé $E \setminus \mathcal{O}$ est d'intérieur vide (conséquence du théorème 2.6) et le fait que le complémentaire d'une intersection est la réunion des complémentaires, on a l'énoncé équivalent suivant du théorème de Baire.

Théorème 2.21. Baire

Soit (E, d) un espace métrique complet. Si $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fermés d'intérieur vide dans E , la réunion $\mathcal{F} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n$ est alors d'intérieur vide.

On peut encore énoncer le théorème de Baire de la façon suivante.

Théorème 2.22. Baire

Soit (E, d) un espace métrique complet. Si $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fermés de E telle que $E = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n$, alors l'un des fermés $\mathcal{F}_n$ est d'intérieur non vide.

Avec les notations et hypothèses précédentes, on peut en fait montrer que l'ouvert $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{\mathcal{F}}_n$ est dense dans E (exercice 2.8).

2.5 Limites réelles supérieure et inférieure

À toute suite réelle bornée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on peut associer les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ respectivement définies par $v_n = \sup_{p \geq n} u_p$ et $w_n = \inf_{p \geq n} u_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ces suites sont bien définies du fait que tous les ensemble $E_n = \{u_p, p \geq n\}$ sont bornés et on a $w_n = \inf(E_n) \leq v_n = \sup(E_n)$.

Lemme 2.3 Avec les hypothèses et notations qui précèdent, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée et la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante majorée.

Démonstration La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée, on a en notant $m = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, m \leq u_p \leq M$$

c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, m est un minorant de E_n et M un majorant de E_n , ce qui entraîne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leq w_n = \inf(E_n) \leq v_n = \sup(E_n) \leq M$$

Les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc bornées. En écrivant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $E_{n+1} \subset E_n = \{u_n\} \cup E_{n+1}$, on déduit que :

$$w_n = \inf(E_n) \leq w_{n+1} = \inf(E_{n+1}) \text{ et } v_{n+1} = \sup(E_{n+1}) \leq v_n = \sup(E_n)$$

c'est-à-dire que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante. ■

Du lemme précédent, on déduit que les suites réelles $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes, ce qui permet de définir les réels :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$$

ces limites étant respectivement appelées la *limite supérieure* et la *limite inférieure* de la suite bornée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On les note aussi $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ et $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$. On a donc :

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{p \geq n} u_p = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{p \geq n} u_p \right) \\ \ell_2 &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{p \geq n} u_p = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{p \geq n} u_p \right) \end{aligned}$$

Théorème 2.23.

Avec les hypothèses et notations qui précèdent, les réels ℓ_1 et ℓ_2 sont des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et pour toute valeur d'adhérence ℓ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a $\ell_1 \leq \ell \leq \ell_2$. C'est-à-dire que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est plus grande valeur d'adhérence et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$ la plus petite valeur d'adhérence de la suite bornée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration De $\ell_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} (w_n)$ avec $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante, on déduit que pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier n_ε tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \ell_1 - \varepsilon < w_n = \inf_{p \geq n} u_p \leq \ell_1$$

et par définition de la borne inférieure, pour tout $n \geq n_\varepsilon$, il existe un entier $p \geq n$ tel que $w_n \leq u_p < w_n + \varepsilon \leq \ell_1 + \varepsilon$. On a donc montré que pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $p \geq n$ tel que $\ell_1 - \varepsilon < u_p < \ell_1 + \varepsilon$ (pour ε donné, on a soit $n \geq n_\varepsilon$ et on trouve un tel entier $p \geq n$, soit $0 \leq n < n_\varepsilon$ et on prend alors p qui correspond à n_ε). On peut alors extraire de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge vers ℓ_1 en procédant comme suit : prenant $\varepsilon = 1$ et $n = 0$, on a $p = \varphi(0) \geq 0$ tel que $\ell_1 - 1 < u_{\varphi(0)} < \ell_1 + 1$, puis pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $n = \varphi(0) + 1$ on a $p = \varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $\ell_1 - \frac{1}{2} < u_{\varphi(1)} < \ell_1 + \frac{1}{2}$ et continuant ainsi de suite on construit une suite strictement croissante d'entiers naturels $(\varphi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\ell_1 - \frac{1}{n+1} < u_{\varphi(n)} < \ell_1 + \frac{1}{n+1}$ (les entiers $\varphi(0) < \dots < \varphi(k)$ étant construits en prenant $\varepsilon = \frac{1}{k+2}$ et $n = \varphi(k) + 1$ on obtient $\varphi(k+1)$). On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = \ell_1$.

On montre de manière analogue que ℓ_2 est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)}$ une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $(\varphi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels (l'existence de valeurs d'adhérence d'une suite bornée est assurée par le théorème de Bolzano-Weierstrass). En passant à la limite dans les encadrements $w_{\varphi(n)} \leq u_{\varphi(n)} \leq v_{\varphi(n)}$, on obtient l'encadrement $\ell_1 \leq \ell \leq \ell_2$. ■

Dans le cas où la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, soit elle n'est pas majorée et $+\infty$ est valeur d'adhérence, soit elle n'est pas minorée et $-\infty$ est valeur d'adhérence. Donc une suite réelle a toujours des valeurs d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et on peut définir sa limite supérieure [resp. inférieure] dans $\overline{\mathbb{R}}$ comme la plus grand [resp. plus petite] de ses valeurs d'adhérence.

Théorème 2.24.

Une suite réelle suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, on a $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Démonstration Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, sa limite ℓ est alors l'unique valeur d'adhérence et on a $\ell_1 = \ell_2$. Réciproquement si $\ell_1 = \ell_2$, toute valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant comprise entre ℓ_1 et ℓ_2 , il ne peut y en avoir qu'une et comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, elle est nécessairement convergente (théorème 2.17). ■

Théorème 2.25.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles bornées.

1. On a :

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} (u_n) + \liminf_{n \rightarrow +\infty} (v_n) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) \\ \limsup_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n \end{aligned}$$

2. Si $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (u_n) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (v_n) \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

Démonstration

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $p \geq n$, on a $\inf_{p \geq n} u_p + \inf_{p \geq n} v_p \leq u_p + v_p$, donc $\inf_{p \geq n} u_p + \inf_{p \geq n} v_p \leq \inf_{p \geq n} (u_p + v_p)$ et passant à la limite quand n tend vers l'infini, on en déduit que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (u_n) + \liminf_{n \rightarrow +\infty} (v_n) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$. De même en écrivant que $u_p + v_p \leq \sup_{p \geq n} u_p + \sup_{p \geq n} v_p$ pour tous $p \geq n$, on en déduit que $\sup_{p \geq n} (u_p + v_p) \leq \sup_{p \geq n} u_p + \sup_{p \geq n} v_p$ pour tout n et passant à la limite, il en résulte que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

2. Si $u_p \leq v_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a alors $\inf_{p \geq n} u_p \leq \inf_{p \geq n} v_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et passant à la limite, on en déduit que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (u_n) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$. De manière analogue, on vérifie que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n$. ■

En considérant $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-u_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, on a $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = -1$ (la plus petite valeur d'adhérence), donc :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (u_n) + \liminf_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = -2 < \liminf_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 0$$

2.6 Limites et continuité des fonctions

Pour ce paragraphe, $\mathbb{R}$ est muni de la distance définie par la valeur absolue, (E, d) , (F, d') sont deux espaces métriques, D est une partie non vide de E non réduite à un point et f est une fonction de D dans F .

Définition 2.17. Soit α un point dans l'adhérence $\overline{D}$ de D . On dit que f admet une *limite* quand x tend vers α dans D , s'il existe $\ell \in F$ tel que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}, \exists \eta \in \mathbb{R}^{+,*} ; (x \in D \setminus \{\alpha\}, d(x, \alpha) < \eta) \Rightarrow (d'(f(x), \ell) < \varepsilon)$$

Comme pour les suites, on peut vérifier en utilisant l'inégalité triangulaire que si la fonction f admet une limite en $\alpha \in \overline{D}$, cette dernière est alors unique et on peut noter $\ell = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \ell$.

Dans le cas où f est définie en α , on peut avoir $f(\alpha) \neq \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$. Par exemple pour la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour $x \neq 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$.

Le théorème qui suit nous donne une caractérisation séquentielle de la notion de limite.

Théorème 2.26.

La fonction $f : D \rightarrow F$ admet une limite en $\alpha \in \overline{D}$ si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $D \setminus \{\alpha\}$ qui converge vers α , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Démonstration Soit $f : D \rightarrow F$ admettant une limite $\ell \in F$ en $\alpha \in \overline{D}$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$ il existe $\eta \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $d(x, \alpha) < \eta$ dans $D \setminus \{\alpha\}$ entraîne $d'(f(x), \ell) < \varepsilon$ et si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de $D \setminus \{\alpha\}$ qui converge vers α , il existe alors un entier n_0 tel que $0 < d(x_n, \alpha) < \eta$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui implique $d'(f(x_n), \ell) < \varepsilon$. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$. Réciproquement, on suppose que f transforme toute suite d'éléments de $D \setminus \{\alpha\}$ qui converge vers α en une suite convergente. Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suite de points de $D \setminus \{\alpha\}$ qui convergent vers α . Les suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ et ℓ' dans F . On définit la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $D \setminus \{\alpha\}$ par $z_{2n} = x_{2n}$ et $z_{2n+1} = y_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α , donc $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et on a :

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{2n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_{2n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_{2n+1}) = \ell'$$

Donc toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $D \setminus \{\alpha\}$ convergente vers α est transformée en une suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un même élément ℓ de F . Si f n'admet pas ℓ pour limite en α , il existe alors un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ on peut trouver $x_n \in D \setminus \{\alpha\}$ tel que $d(x_n, \alpha) < \frac{1}{n}$ et $d'(f(x_n), \ell) \geq \varepsilon$. On a donc ainsi une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $D \setminus \{\alpha\}$ qui converge vers α pour laquelle la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ , ce qui est une contradiction d'après ce qui précède. ■

On peut remarquer que dans l'énoncé du théorème précédent, il n'est pas demandé *a priori* aux suites $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de converger vers un même élément, même si ce fait apparaît dans la démonstration. D'un point de vue pratique, le théorème précédent s'exprime aussi de façon plus classique en disant que $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell$ si, et

seulement si, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$ pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $D \setminus \{\alpha\}$ qui converge vers α .

Définition 2.18. On dit qu'une fonction $f : D \rightarrow F$ est *continue* en $\alpha \in D$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}, \exists \eta \in \mathbb{R}^{+,*} ; (x \in D, d(x, \alpha) < \eta) \Rightarrow (d'(f(x), f(\alpha)) < \varepsilon)$$

Dans le cas où f est continue en tout point de D , on dit qu'elle est continue sur D .

Si α est isolé dans D , c'est-à-dire s'il existe $\delta \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $B(\alpha, \delta) = \{\alpha\}$, toute fonction $f : D \rightarrow F$ est continue en α . En un point $\alpha \in D$ non isolé, la continuité de f en α se traduit par $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$.

Exemples 2.5

- Munissant E de la distance discrète, toute fonction $f : E \rightarrow F$ est continue. Pour $\eta \in]0, 1[$, la condition $d(x, \alpha) < \eta$ équivaut à $x = \alpha$, ce qui implique que $d'(f(x), f(\alpha)) = 0 < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$.
- En utilisant l'inégalité triangulaire, on vérifie que pour tout $x_0 \in E$, la fonction $x \mapsto d(x, x_0)$ est continue de E dans $\mathbb{R}$. De même pour toute partie non vide A de E , la fonction $x \mapsto d(x, A)$ est continue de E dans $\mathbb{R}$.

Du théorème 2.26, on déduit la caractérisation séquentielle suivante de la notion de continuité en un point.

Théorème 2.27.

La fonction $f : D \rightarrow F$ est continue en $\alpha \in D$ si, et seulement si, toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de D qui converge vers α est transformée par f en une suite convergente dans F .

Comme pour le théorème 2.26, les suites $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dans l'énoncé du théorème précédent convergent nécessairement vers $f(\alpha)$ et ce dernier s'exprime en disant que f est continue en α si, et seulement si, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\alpha)$ pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de D qui converge vers α .

Exemple 2.5 La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ définie par $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 0$ sinon est discontinue (i. e. non continue) en tout point. En effet, un nombre rationnel r est limite de la suite d'irrationnels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(r + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x_n) = 0 \neq \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(r)$ et un nombre irrationnel $x \notin \mathbb{Q}$ est limite d'une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombre rationnels avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(r_n) = 1 \neq \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.

Une fonction continue ne transforme pas nécessairement une suite de Cauchy dans E en suite de Cauchy dans F . Par exemple $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$,

la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^{+,*}$ et $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*} = (n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas de Cauchy.

Théorème 2.28.

Soient (G, d'') un espace métrique, $f : D \rightarrow J \subset F$ une fonction continue en $\alpha \in D$ et $g : J \rightarrow G$ une fonction continue en $f(\alpha)$. La composée $g \circ f : D \rightarrow G$ est continue en α .

Démonstration Par continuité de la fonction g en $f(\alpha)$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$, il existe $\eta' \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $d''(g(y), g(f(\alpha))) < \varepsilon$ pour tout $y \in J$ tel que $d'(y, f(\alpha)) < \eta'$ et il existe $\eta \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $d'(f(x), f(\alpha)) < \eta'$ pour tout $x \in D$ tel que $d(x, \alpha) < \eta$, ce qui nous donne $d''(g(f(x)), g(f(\alpha))) < \varepsilon$ pour tout $x \in D$ tels que $d(x, \alpha) < \eta$. ■

Exemple 2.6 Si $f : D \rightarrow F$ est continue en $\alpha \in D$, alors pour tout $y \in F$, la fonction $x \mapsto d'(f(x), y)$ est continue en α .

Le théorème qui suit nous donne une caractérisation topologique de la notion de continuité sur D (voir aussi le paragraphe 2.10).

Théorème 2.29.

La fonction $f : D \rightarrow F$ est continue sur D si, et seulement si, l'image réciproque par f de tout ouvert [resp. tout fermé] de F est un ouvert [resp. un fermé] de D (pour la topologie induite).

Démonstration On rappelle qu'une partie $\mathcal{J}$ de D est ouverte [resp. est fermée] dans D si elle s'écrit $\mathcal{J} = D \cap \mathcal{O}$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert [resp. un fermé] de E . Soient $f : D \rightarrow F$ une fonction continue et $\mathcal{O}'$ un ouvert de F . Pour tout α dans $f^{-1}(\mathcal{O}')$, on a $f(\alpha) \in \mathcal{O}'$, donc il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte $B'(f(\alpha), \varepsilon)$ soit contenue dans $\mathcal{O}'$ et avec la continuité de f , on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in B(\alpha, \eta) \cap D$ on ait $f(x) \in B'(f(\alpha), \varepsilon) \subset \mathcal{O}'$. On a donc $B(\alpha, \eta) \cap D \subset f^{-1}(\mathcal{O}')$ et en posant $\mathcal{O} = \bigcup_{\alpha \in f^{-1}(\mathcal{O}')} B(\alpha, \eta)$, on définit un ouvert

de E tel que $f^{-1}(\mathcal{O}') = D \cap \mathcal{O}$, ce qui prouve que $f^{-1}(\mathcal{O}')$ est ouvert dans D . Réciproquement, supposons que l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de D . Pour $\alpha \in D$ et $\varepsilon > 0$, $f^{-1}(B'(f(\alpha), \varepsilon))$ est un ouvert de D , il existe donc un réel $\eta > 0$ tel que $B(\alpha, \eta) \cap D \subset f^{-1}(B'(f(\alpha), \varepsilon))$, ce qui signifie que $d'(f(x), f(\alpha)) < \varepsilon$ pour tout $x \in B(\alpha, \eta) \cap D$. La fonction f est donc continue en tout point de D . Pour ce qui est de l'image réciproque des fermés, on utilise le fait qu'un fermé est le complémentaire d'un ouvert et l'image réciproque du complémentaire est le complémentaire de l'image réciproque. ■

Définition 2.19. Soit J une partie non vide de F . On dit que $f : D \rightarrow J$ est un *homéomorphisme*, si elle est continue bijective d'inverse f^{-1} continue.

Définition 2.20. Deux distances d et d' sur E sont dites *topologiquement équivalentes* si l'identité $Id : x \mapsto x$ réalise un homéomorphisme de (E, d) sur (E, d') .

La définition précédente revient aussi à dire que les distances d et d' définissent la même topologie sur E , ce qui signifie qu'une partie $\mathcal{O}$ de E est ouverte pour la distance d si, et seulement si, elle est ouverte pour d' .

Exemples 2.6

- Les distances $d : (x, y) \mapsto |y - x|$ et $d' : (x, y) \mapsto \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right|$ sont topologiquement équivalentes sur $\mathbb{R}^{+,*}$. Cela résulte du fait que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ réalise un homéomorphisme de $\mathbb{R}^{+,*}$ sur lui même égal à son inverse.
- Les distances $d : (x, y) \mapsto |y - x|$ et $d' : (x, y) \mapsto |\arctan(y) - \arctan(x)|$ sont topologiquement équivalentes sur $\mathbb{R}$, alors que $(\mathbb{R}, d')$ n'est pas complet (exercice 2.6). La complétude n'est pas une notion topologique.
- Deux distances équivalentes au sens de la définition 2.2 sont topologiquement équivalentes, mais la réciproque est fausse. Si d est une distance sur E l'application $d' : (x, y) \mapsto \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ définit une distance sur E topologiquement équivalente à d , mais non équivalente pour d non bornée (exercice 2.5).

Définition 2.21. On dit que $f : D \rightarrow F$ est *uniformément continue* sur D si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}, \exists \eta \in \mathbb{R}^{+,*} ; ((x, y) \in D^2, d(x, y) < \eta) \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Exemples 2.7

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Cela se déduit de :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$$

Cette inégalité est triviale pour $x = y$ et pour $y > x \geq 0$ (x, y jouent des rôles symétriques), on a $|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 = y - 2\sqrt{xy} + x > y - x$.

- Une fonction $f : D \rightarrow F$ lipschitzienne (ce qui signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ pour tous x, y dans D) est uniformément continue sur D .

- Pour tout $x_0 \in E$ et tout sous-ensemble non vide A de E , les fonctions $x \mapsto d(x, x_0)$ et $x \mapsto d(x, A)$ sont uniformément continues de E dans $\mathbb{R}$ car 1-lipschitzienne.

Une fonction uniformément continue sur D est évidemment continue en tout point de D , la nuance étant qu'un réel η associé à ε ne dépend que de f , D et ε .

La notion de continuité est une notion ponctuelle alors que celle de continuité uniforme est globale. On peut aussi remarquer que cette notion de continuité uniforme est une notion métrique alors que celle de continuité est topologique.

Une fonction $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ peut très bien être uniformément continue sur tout intervalle strictement contenu dans D sans être uniformément continue sur D tout entier. C'est le cas, par exemple, pour la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $D =]0, 1]$. Elle

est lipschitzienne sur tout $[a, 1]$ où $0 < a < 1$ ($|f(y) - f(x)| = \frac{|y - x|}{xy} \leq \frac{|y - x|}{a^2}$),

donc uniformément continue sur ces intervalles. Mais pour tout réel $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$,

$x = \eta$, $y = x + \frac{\eta}{2}$, on a $|y - x| < \eta$ avec $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{3\eta} > \frac{2}{3}$.

Le théorème qui suit nous donne une caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité.

Théorème 2.30.

Une fonction $f : D \rightarrow F$ est uniformément continue si, et seulement si, pour toutes suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} d'(f(x_n), f(y_n)) = 0$.

Démonstration Soit $f : D \rightarrow F$ uniformément continue. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$, il existe $\eta \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tous x, y dans D vérifiant $d(x, y) < \eta$. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites d'éléments de D telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = 0$, il existe alors un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, y_n) < \eta$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui entraîne que $d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$ et prouve que l'on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} d'(f(y_n), f(x_n)) = 0$. Réciproquement supposons que l'on ait $\lim_{n \rightarrow +\infty} d'(f(x_n), f(y_n)) = 0$ pour toutes suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Si f n'est pas uniformément continue, il existe alors un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$ on peut trouver x_n, y_n dans D tel que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ et $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$, ce qui nous donne deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans D telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = 0$ et $(d'(f(x_n), f(y_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, ce qui n'est pas possible. ■

Ce résultat peut être utilisé pour montrer qu'une fonction n'est pas uniformément continue sur D . Par exemple pour tout réel $p > 1$, la fonction $f : x \mapsto x^p$ est continue non uniformément continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$ (exercice 2.10).

Une fonction uniformément continue $f : D \rightarrow F$ transforme une suite de Cauchy dans D en suite de Cauchy dans F . En effet, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tous x, y dans D tels que $d(x, y) < \eta$ et pour

toute suite de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans D , il existe entier n_η tel que $d(x_m, x_n) < \eta$ pour tous $m > n \geq n_\eta$, ce qui implique que $d'(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$ et prouve que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F .

Théorème 2.31.

Soient J un sous-ensemble non vide de F et (G, d'') un espace métrique. La composée de deux fonctions uniformément continues $f : D \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow G$ est uniformément continue.

Démonstration Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta' > 0$ tel que l'on ait $d''(g(u), g(v)) < \varepsilon$ pour tous u, v dans J tels que $d'(u, v) < \eta'$ et il existe $\eta \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $d'(f(x), f(y)) < \eta'$ pour tous x, y dans D tels que $d(x, y) < \eta$, ce qui nous donne $d''(g(f(x)), g(f(y))) < \varepsilon$ pour tous x, y dans D tels que $d(x, y) < \eta$.

■

Le théorème qui suit nous sera utile pour définir l'intégrale de Riemann des fonctions réglées à partir de celle des fonctions en escalier (paragraphe 8.1).

Théorème 2.32.

Si D est dense dans E et F est complet, alors toute fonction uniformément continue de D dans F se prolonge de manière unique en une fonction uniformément continue de E dans F .

Démonstration Soient D une partie dense de E et $f : D \rightarrow F$ une fonction uniformément continue. Pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D telle que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Cette suite est en particulier de Cauchy et il en est de même pour la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ car f est uniformément continue, donc pour F complet cette dernière suite converge vers un élément y de F . Si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une autre suite de D qui converge vers x , on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} d'(f(x_n), f(y_n)) = 0$, donc $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ (qui est convergente) converge vers la même limite que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$. On peut donc définir la fonction $g : E \rightarrow F$ par $g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de D qui converge vers x . Pour $x \in D$, prenant $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ constante égale à x , on $g(x) = f(x)$, donc g prolonge bien f . Montrons que cette fonction g est uniformément continue. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tous x, y dans D tels que $d(x, y) < \eta$. Pour x, y dans E et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans D qui convergent respectivement vers x et y , on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d'(g(x), g(y)) \leq d'(g(x), f(x_n)) + d'(f(x_n), f(y_n)) + d'(f(y_n), g(y))$$

Vu que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n, y = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n, g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ et $g(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$, il existe un entier n_0 tel que $d(x_n, x) < \frac{\eta}{3}, d(y_n, y) < \frac{\eta}{3}, d'(g(x), f(x_n)) < \varepsilon$ et $d'(f(y_n), g(y)) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui implique que :

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) < 2\frac{\eta}{3} + d(x, y) < \eta$$

en prenant x, y tels que $d(x, y) < \frac{\eta}{3}$ et nous donne au final $d'(g(x), g(y)) \leq \varepsilon$. La fonction g est donc uniformément continue sur E . L'unicité de ce prolongement est due au fait que si h est une autre fonction avec les mêmes propriétés que g , on a alors $h(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = g(x)$ (avec des hypothèses claires) pour tout $x \in E$. ■

Dans le cadre des fonctions d'une variable réelle, on a les notions particulières de limite à gauche, à droite et à l'infini, ainsi que celles de continuité à gauche et à droite, dont l'étude est faite au chapitre 6.

2.7 Continuité et compacité

Une fonction continue n'est pas nécessairement uniformément continue comme le montrent les exemples des fonctions $x \mapsto x^p$ sur $\mathbb{R}$ pour tout réel $p > 1$, mais pour les fonctions définies sur un compact, on a le résultat suivant.

Théorème 2.33. Heine

Si K est un compact de E , alors toute fonction continue $f : K \rightarrow F$ est uniformément continue sur K .

Démonstration Si $f : K \rightarrow F$ n'est pas uniformément continue, il existe alors $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$ et deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans K tels que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ et $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble K étant compact, on peut extraire deux suites $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui convergent respectivement vers x et y dans K . Mais avec $d(x_n, y_n) < \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n}$, on déduit que $d(x, y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) = 0$, soit $x = y$, puis avec la continuité de f on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} d'(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) = 0$, ce qui est en contradiction avec le fait que $d'(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. ■

Théorème 2.34.

L'image d'un compact par une application continue est un compact, ce qui signifie que si K est un compact de E et $f : K \rightarrow F$ une fonction continue, alors $f(K)$ est un compact de (F, d') .

Démonstration Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $f(K)$ avec $y_n = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans le compact K on peut extraire une suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un élément x de K et avec la continuité de f on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\varphi(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(x) \in f(K)$, donc $f(K)$ est compact. ■

Un compact étant borné, on déduit du théorème précédent qu'une fonction continue d'un compact K de E dans F est bornée.

Théorème 2.35.

Soient K un compact de E et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Cette fonction est bornée et atteint ses bornes, ce qui signifie qu'il existe α, β dans K tels que $f(\alpha) = \inf_{x \in K} f(x)$ et $f(\beta) = \sup_{x \in K} f(x)$.

Démonstration $f(K)$ étant compact est en particulier borné dans $\mathbb{R}$ et étant non vide, il admet une borne inférieure $m = \inf_{x \in K} f(x)$ et une borne supérieure $M = \sup_{x \in K} f(x)$. Par définition de la borne inférieure m , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on peut trouver x_n dans K tel que $m \leq f(x_n) < m + \frac{1}{n}$ et de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie dans le compact K on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\alpha \in K$. On a donc $m \leq f(x_{\varphi(n)}) < m + \frac{1}{\varphi(n)}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) = +\infty$, ce qui nous donne avec la continuité de f , $f(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = m$. On procède de manière analogue pour la borne supérieure. ■

Pour toute partie non vide D de E , on note $\mathcal{C}^0(D, F)$ l'ensemble des fonctions continues de D dans F .

Définition 2.22. Soient D une partie non vide de E et A une partie non vide de $\mathcal{C}^0(D, F)$. On dit que :

- A est *équicontinue* en $\alpha \in K$ si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ (dépendant de ε et de α) tel que :

$$(x \in D \text{ et } d(x, \alpha) < \eta) \Rightarrow (\forall f \in A, d'(f(x), f(\alpha)) < \varepsilon)$$

- A est *équicontinue* sur D , si elle est équicontinue en tout point de D ;
- A est *uniformément équicontinue* sur D si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ (dépendant de ε) tel que :

$$((x, y) \in D^2 \text{ et } d(x, y) < \eta) \Rightarrow (\forall f \in A, d'(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

Exemples 2.8

- Une famille finie d'éléments de $\mathcal{C}^0(D, F)$ est équicontinue.
- Pour tout réel $\lambda > 0$, l'ensemble des fonctions λ -lipschitzienne de D dans F est uniformément équicontinue.

Théorème 2.36.

Pour K compact de E , une partie non vide A de $\mathcal{C}^0(K, F)$ est équicontinue si, et seulement si, elle est uniformément équicontinue.

Démonstration Que K soit compact ou pas, il est clair qu'une partie de $\mathcal{C}^0(K, F)$ uniformément équicontinue est équicontinue. Si $A \subset \mathcal{C}^0(K, F)$ est équicontinue, alors pour tout $x \in K$ et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta_{x,\varepsilon} > 0$ tel que pour tout $y \in B(x, \eta_{x,\varepsilon}) \cap K$ et tout $f \in A$, on a $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Du recouvrement ouvert $K \subset \bigcup_{x \in K} B\left(x, \frac{\eta_{x,\varepsilon}}{2}\right)$ du compact K , on peut extraire un sous-recouvrement

fini $K \subset \bigcup_{k=1}^n B\left(x_k, \frac{\eta_{x_k,\varepsilon}}{2}\right)$. On note $\eta = \min_{1 \leq k \leq n} \frac{\eta_{x_k,\varepsilon}}{2}$ et on se donne x, y dans K tels que $d(x, y) < \eta$ et $f \in A$. En désignant par k un entier compris entre 1 et n tel que $x \in B\left(x_k, \frac{\eta_{x_k,\varepsilon}}{2}\right) \cap K$, on a $d'(f(x), f(x_k)) < \varepsilon$ et :

$$d(y, x_k) \leq d(y, x) + d(x, x_k) < \eta + \frac{\eta_{x_k,\varepsilon}}{2} \leq \eta_{x_k,\varepsilon}$$

soit $y \in B(x_k, \eta_{x_k,\varepsilon})$ et $d'(f(y), f(x_k)) < \varepsilon$, ce qui nous donne :

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(x_k)) + d'(f(x_k), f(y)) < 2\varepsilon$$

et prouve que A est uniformément équicontinue. ■

Pour la suite de ce paragraphe, on se donne un compact K de E .

Pour toutes fonctions f, g dans $\mathcal{C}^0(K, F)$, la fonction $\varphi : x \mapsto d'(f(x), g(x))$ est continue sur le compact K . En effet, pour tout $\alpha \in K$ et tout $x \in K$, on a :

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(\alpha)| &\leq |d'(f(x), g(x)) - d'(f(x), g(\alpha))| + |d'(f(x), g(\alpha)) - d'(f(\alpha), g(\alpha))| \\ &\leq d'(g(x), g(\alpha)) + d'(f(x), f(\alpha)) \end{aligned}$$

et pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$, il existe $\eta \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que pour tout $x \in E$ tel que $d(x, \alpha) < \eta$ on a :

$$d'(f(x), f(\alpha)) < \varepsilon \text{ et } d'(g(x), g(\alpha)) < \varepsilon$$

ce qui implique que $|d'(f(x), g(x)) - d'(f(\alpha), g(\alpha))| < 2\varepsilon$ pour tout $x \in E$ tel que $d(x, \alpha) < \eta$, soit la continuité de φ en α . La fonction φ est donc majorée sur le compact K et atteint sa borne supérieure, ce qui permet de définir :

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in K} d'(f(x), g(x))$$

Théorème 2.37.

L'application d_∞ est une distance sur $\mathcal{C}^0(K, F)$ et pour F complet, l'espace métrique $(\mathcal{C}^0(K, F), d_\infty)$ est complet.

Démonstration Du fait que d' est une distance sur F , on déduit facilement que d_∞ est une distance sur $\mathcal{C}^0(K, F)$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}^0(K, F), d_\infty)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \forall m \geq n_\varepsilon, \forall x \in K, d'(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon \quad (2.3)$$

donc pour tout $x \in K$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F et en conséquence convergente vers un élément $f(x)$ de F , dans le cas où cet espace est complet. Faisant tendre m vers l'infini dans (2.3), on déduit que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in K, d'(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon \quad (2.4)$$

(continuité de $z \in F \mapsto d'(z, f_n(x))$ à x et n fixés). Pour tout $\alpha \in K$ et tout $x \in K$, on a :

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(\alpha)) &\leq d'(f(x), f_{n_\varepsilon}(x)) + d'(f_{n_\varepsilon}(x), f_{n_\varepsilon}(\alpha)) + d'(f_{n_\varepsilon}(\alpha), f(\alpha)) \\ &\leq 2\varepsilon + d'(f_{n_\varepsilon}(x), f_{n_\varepsilon}(\alpha)) \end{aligned}$$

et pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$, il existe $\eta \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $d'(f_{n_\varepsilon}(x), f_{n_\varepsilon}(\alpha)) < \varepsilon$ pour tout $x \in E$ tel que $d(x, \alpha) < \eta$ (continuité en α de f_{n_ε}), ce qui implique que $d'(f(x), f(\alpha)) < 3\varepsilon$ pour tout $x \in E$ tel que $d(x, \alpha) < \eta$, soit la continuité de f en α . La fonction f est donc dans $\mathcal{C}^0(K, F)$ et les inégalités (2.4) se traduisent par $d_\infty(f, f_n) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui signifie que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{C}^0(K, F)$. En conclusion, $(\mathcal{C}^0(K, F), d_\infty)$ est complet. ■

Une suite d'éléments de $\mathcal{C}^0(K, F)$ convergente pour d_∞ est dite *uniformément convergente*. Voir le paragraphe 5.1 pour une étude détaillée des suites de fonctions sur un espace normé.

Théorème 2.38.

Soient A une partie non vide de $\mathcal{C}^0(K, F)$ équicontinue et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A . Cette suite converge dans $(\mathcal{C}^0(K, F), d_\infty)$ si, et seulement si, pour tout $x \in K$ la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans F (la convergence uniforme est équivalente à la convergence simple).

Démonstration Si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{C}^0(K, F)$, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$ et avec $d'(f_n(x), f(x)) \leq d_\infty(f_n, f)$ pour tout $x \in K$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ dans F pour tout $x \in K$.

Réciproquement, on suppose que pour tout $x \in K$, il existe un élément $f(x)$ de F' (unique) tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$. Comme les fonctions f_n sont toutes dans A qui est équicontinue, donc uniformément continue, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tous x, y dans K tels que $d(x, y) < \eta$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d'(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$, ce qui implique que :

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(y)) &\leq d'(f(x), f_n(x)) + d'(f_n(x), f_n(y)) + d'(f_n(y), f(y)) \\ &< d'(f(x), f_n(x)) + \varepsilon + d'(f_n(y), f(y)) \end{aligned}$$

et faisant tendre n vers l'infini, il en résulte que $d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$ pour tous x, y dans K tels que $d(x, y) < \eta$, ce qui signifie que f est uniformément continue, donc dans $\mathcal{C}^0(K, F)$. Comme K est compact, il est précompact (lemme 2.1) et peut donc être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon η , ce qui signifie qu'il existe $x_1, \dots, x_r$ dans K tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^r B(x_k, \eta)$, donc pour tout

$x \in K$ et $k \in \{1, \dots, r\}$ tel que $x \in B(x_k, \eta)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d'(f_n(x), f(x)) &\leq d'(f_n(x), f_n(x_k)) + d'(f_n(x_k), f(x_k)) + d'(f(x_k), f(x)) \\ &\leq 2\varepsilon + d'(f_n(x_k), f(x_k)) \leq 2\varepsilon + \sum_{j=1}^r d'(f_n(x_j), f(x_j)) \end{aligned}$$

ce qui implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $d_\infty(f_n, f) \leq 2\varepsilon + \sum_{j=1}^r d'(f_n(x_j), f(x_j))$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^r d'(f_n(x_j), f(x_j)) = 0$, ce qui nous assure de l'existence d'un entier n_ε tel que $d_\infty(f_n, f) \leq 3\varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et signifie que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{C}^0(K, F)$. ■

Théorème 2.39. Ascoli

Soit A une partie non vide de $\mathcal{C}^0(K, F)$. Pour F complet, A est relativement compacte dans $(\mathcal{C}^0(K, F), d_\infty)$ si, et seulement si, elle est équicontinue et pour tout $x \in K$ l'ensemble $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact dans F .

Démonstration On suppose que A est relativement compacte dans l'espace métrique complet $(\mathcal{C}^0(K, F), d_\infty)$, donc précompact (corollaire 2.2), ce qui signifie que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions $f_1, \dots, f_n$ dans $\mathcal{C}^0(K, F)$ tels que $A \subset \bigcup_{k=1}^n B(f_k, \varepsilon)$, donc pour toute fonction $f \in A$ il existe un entier k compris entre 1 et n tel que $d_\infty(f, f_k) < \varepsilon$, ce qui implique que pour tout $x \in K$, on a $d'(f(x), f_k(x)) < \varepsilon$, soit $f(x) \in B(f_k(x), \varepsilon)$. On a donc $A(x) \subset \bigcup_{k=1}^n B(f_k(x), \varepsilon)$ pour tout $x \in K$, ce qui signifie que $A(x)$ est précompact dans F ($\varepsilon > 0$ est quelconque) et en conséquence relativement compact puisque F est complet (corollaire 2.2). D'autre part, chaque fonction f_k qui est continue sur le compact K est uniformément continue, donc il existe un réel $\eta_k > 0$ tel que $d'(f_k(x), f_k(y)) < \varepsilon$ pour tous x, y dans K tels que $d(x, y) < \eta_k$. En posant $\eta = \min_{1 \leq k \leq n} \eta_k$, pour toute fonction $f \in A$ et k entier compris entre 1 et n tel que $d_\infty(f, f_k) < \varepsilon$, on a pour tous x, y dans K tels que $d(x, y) < \eta$:

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f_k(x)) + d'(f_k(x), f_k(y)) + d'(f_k(y), f(y)) < 3\varepsilon$$

ce qui nous dit que A est équicontinue. Réciproquement, on suppose que A est équicontinue et que chaque $A(x)$ est relativement compact. Il s'agit alors de montrer que toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A admet une valeur d'adhérence dans $\mathcal{C}^0(K, F)$ (théorème 2.15). Le compact K étant séparable (théorème 2.16), on se donne une partie dénombrable $D = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset K$ dense dans K . L'ensemble $A(x_0) = \{f(x_0), f \in A\}$ étant relativement compact dans F , on peut extraire de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite $(y_{\varphi_0(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (f_{\varphi_0(n)}(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$

convergente vers un élément $f(x_0) \in F$. De la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} = (f_{\varphi_0(n)}(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ dans l'ensemble relativement compact $A(x_1)$, on peut extraire une sous-suite $(z_{\varphi_1(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (f_{\varphi_0 \circ \varphi_1(n)}(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers un élément $f(x_1) \in F$, la suite $(f_{\varphi_0 \circ \varphi_1(n)}(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de $(f_{\varphi_0(n)}(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ étant convergente vers $f(x_0)$. Par récurrence, on peut donc définir une suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, m\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_m(n)}(x_k) = f(x_k)$$

La fonction $\varphi : n \in \mathbb{N} \mapsto \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(n) \in \mathbb{N}$ est alors strictement croissante. En effet pour toute fonction strictement croissante $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, on a $\sigma(k) \geq k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui nous donne pour $n < m$ dans $\mathbb{N}$:

$$\varphi(n) < \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(m) \leq \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_{n+1}(m) \leq \dots \leq \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_m(m) = \varphi(m)$$

(les φ_k étant strictement croissantes, il en est de même de $\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n$). Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\varphi(n)}(x_m) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(n)}(x_m) = f(x_m)$$

puisque la suite $(f_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(n)}(x_m))_{n \geq m}$ est extraite de $(f_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_m(n)}(x_m))_{n \geq m}$. On vérifie alors que la fonction f ainsi définie sur D est uniformément continue. L'ensemble A qui est équicontinue sur le compact K est uniformément équicontinue, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $d'(g(x), g(y)) < \varepsilon$ pour tous x, y dans K tels que $d(x, y) < \eta$ et tout $g \in A$, ce qui implique que pour tous les entiers p, q tel que $d(x_p, x_q) < \eta$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & d'(f(x_p), f(x_q)) \\ & \leq d'(f(x_p), f_{\varphi(n)}(x_p)) + d'(f_{\varphi(n)}(x_p), f_{\varphi(n)}(x_q)) + d'(f_{\varphi(n)}(x_q), f(x_q)) \\ & \leq d'(f(x_p), f_{\varphi(n)}(x_p)) + \varepsilon + d'(f_{\varphi(n)}(x_q), f(x_q)) \end{aligned}$$

ce qui nous donne en faisant tendre n vers l'infini, $d'(f(x_p), f(x_q)) \leq \varepsilon$. Donc f est uniformément continue sur D qui est dense dans K , ce qui permet de la prolonger en une fonction f uniformément continue sur K (théorème 2.32). Il reste enfin à vérifier que la suite $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{C}^0(K, F)$. L'ensemble $A \cup \{f\}$ étant équicontinu, il nous suffit de montrer que pour tout $x \in K$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\varphi(n)}(x) = f(x)$. Par équicontinuité de $A \cup \{f\}$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $d'(g(x), g(y)) < \varepsilon$ pour tous x, y dans K tels que $d(x, y) < \eta$ et tout $g \in A \cup \{f\}$, donc pour $x \in K$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $d(x, x_m) < \eta$ (densité de D dans K), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & d'(f_{\varphi(n)}(x), f(x)) \\ & \leq d'(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(n)}(x_m)) + d'(f_{\varphi(n)}(x_m), f(x_m)) + d'(f(x_m), f(x)) \\ & \leq 2\varepsilon + d'(f_{\varphi(n)}(x_m), f(x_m)) \end{aligned}$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} d'(f_{\varphi(n)}(x_m), f(x_m)) = d'(f(x_m), f(x_m)) = 0$, ce qui nous assure l'existence de $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $d'(f_{\varphi(n)}(x), f(x)) \leq 3\varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et permet de conclure. ■

2.8 Un théorème de point fixe

Pour ce paragraphe, (E, d) est un espace métrique complet, F un fermé non vide dans E et f une application de F dans E . Dans le cas où $f(F) \subset F$, on dit que F est stable par f .

Définition 2.23. On dit que f est *strictement contractante* s'il existe une constante $\lambda \in [0, 1[$ telle que :

$$\forall (x, y) \in F^2, d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$$

Une fonction contractante $f : F \rightarrow E$ est en particulier lipschitzienne, donc uniformément continue.

Pour $\lambda = 0$, la fonction f est constante.

Dans le cas où F est stable par f , on peut définir pour tout $x \in F$ la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on dit que cette suite est l'*orbite* dans F de x suivant f . Elle est aussi définie par $x_n = f^n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$ est la n -ième itérée de f (en

convenant que $f^0 = Id$).

Lemme 2.4 Si une orbite suivant $f : F \rightarrow F$ converge, sa limite α est alors dans F et si de plus la fonction f est continue sur F , on a alors $f(\alpha) = \alpha$.

Démonstration Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$, on a alors $\alpha \in F$ puisque cet ensemble est fermé et pour f continue sur F , on a $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\alpha)$. ■

Définition 2.24. On dit que $\alpha \in F$ est un *point fixe* de f , si $f(\alpha) = \alpha$.

La seule hypothèse de continuité de f n'assure pas la convergence d'une orbite. Par exemple pour $f(x) = -x$ sur $[-1, 1]$ on a $x_n = (-1)^n x_0$ pour tout n et cette suite est divergente pour $x_0 \neq 0$.

La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ fournit un exemple de fonction discontinue en tout point de $\mathbb{R}$ (l'un des exemples 2.5) pour laquelle toute orbite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l'unique point fixe de f , à savoir 1. En effet pour $x_0 \in \mathbb{Q}$, on a $x_n = 1$ pour tout $n \geq 1$ et pour $x_0 \notin \mathbb{Q}$ on a $x_1 = 0$ et $x_n = 1$ pour tout $n \geq 2$, donc dans tous les cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$.

Théorème 2.40. Picard

Si $f : F \rightarrow F$ est une application λ -contractante avec $\lambda \in [0, 1[$, elle admet alors un unique point fixe α dans F et ce point fixe est la limite de toute orbite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivant f . Une majoration de l'erreur d'approximation

de α par les x_n est donnée par $d(\alpha, x_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (la convergence est géométrique).

Démonstration Pour l'existence d'un point fixe, on vérifie qu'une orbite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace métrique complet (E, d) . Pour $q > p \geq 0$ entiers, on a en utilisant l'inégalité polygonale :

$$d(x_q, x_p) \leq d(x_q, x_{q-1}) + \cdots + d(x_{p+1}, x_p)$$

avec pour tout $k \geq 1$:

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(f(x_k), f(x_{k-1})) \leq \lambda d(x_k, x_{k-1}) \leq \cdots \leq \lambda^k d(x_1, x_0)$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} d(x_q, x_p) &\leq \left(\sum_{k=p}^{q-1} \lambda^k \right) d(x_1, x_0) = \frac{\lambda^p (1 - \lambda^{q-p})}{1 - \lambda} d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{\lambda^p}{1 - \lambda} d(x_1, x_0) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

puisque $\lambda \in [0, 1[$. On a donc ainsi montré que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E, d) et en conséquence, elle converge vers un élément $\alpha \in F$ puisque E est complet et F fermé dans E . Avec la continuité de f , on déduit que $f(\alpha) = \alpha$, c'est-à-dire que α est un point fixe de f . Faisant tendre q vers l'infini dans la majoration précédente (pour p fixé) on obtient la majoration $d(\alpha, x_p) \leq \frac{\lambda^p}{1-\lambda} d(x_1, x_0)$. Si $\beta \in F$ est un autre point fixe, on a alors $d(\alpha, \beta) = d(f(\alpha), f(\beta)) \leq \lambda d(\alpha, \beta)$ et nécessairement $\alpha = \beta$ puisque $\lambda \in [0, 1[$. ■

Si (E, d) est un espace métrique complet et F une partie fermée de E , une application $f : F \rightarrow F$ telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x \neq y$ dans F n'a pas nécessairement de point fixe dans F comme le montre l'exemple de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}^+$ ou $f : x \mapsto x + 1 + \frac{1}{x+1}$ sur $\mathbb{R}^+$. Mais dans le cas où F est compact on a le résultat suivant.

Théorème 2.41.

Soit K un compact dans un espace métrique (E, d) (non nécessairement complet) et $f : K \rightarrow K$ telle que :

$$\forall (x, y) \in K^2, (x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y))$$

La fonction f admet un unique point fixe dans K et ce point fixe est limite de toute orbite suivant f .

Démonstration La fonction f qui est lipschitzienne est en particulier continue. L'application $x \mapsto d(f(x), x)$ étant continue sur le compact K et à valeurs

réelles, il existe $\alpha \in K$ tel que $d(f(\alpha), \alpha) = \inf_{x \in K} d(f(x), x)$ (théorème 2.35). Si $f(\alpha) \neq \alpha$, on a alors $d(f(\alpha), f(f(\alpha))) < d(\alpha, f(\alpha))$ avec $f(\alpha) \in K$, ce qui est contradictoire avec le caractère minimal de α . On a donc $f(\alpha) = \alpha$. Si $\beta \neq \alpha$ est un autre point fixe de f , on a alors $d(\alpha, \beta) = d(f(\alpha), f(\beta)) < d(\alpha, \beta)$, ce qui est impossible. En conclusion, f admet un unique point fixe dans K . Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une orbite associée à f . Si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} = \alpha$, la suite est alors stationnaire sur α , donc convergente vers α . On suppose donc que $x_n \neq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on a $0 < d(x_{n+1}, \alpha) = d(f(x_n), f(\alpha)) < d(x_n, \alpha)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que la suite réelle $(d(x_n, \alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante minorée par 0, donc convergente vers un réel $d \geq 0$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant dans le compact K , on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\beta \in K$ et on a :

$$d(f(\beta), \alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f(x_{\varphi(n)}), \alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_{\varphi(n)+1}, \alpha) = d$$

et $\beta \neq \alpha$ entraîne $d = d(\alpha, f(\beta)) = d(f(\alpha), f(\beta)) < d(\alpha, \beta) = d$, soit une impossibilité. On a donc $\beta = \alpha$ et $d = 0$, c'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$. ■

Il peut arriver que la fonction $f : F \rightarrow F$ ne soit pas strictement contractante, mais que l'une de ces itérées $f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}$ avec $p \geq 2$ le soit. Dans ce cas on a

encore existence et unicité du point fixe de f comme limite de toute orbite.

Théorème 2.42.

Si $f : F \rightarrow F$ est telle que l'une de ses itérées f^p pour $p \in \mathbb{N}^$ soit strictement contractante, elle admet alors un unique point fixe dans F limite de toute orbite.*

Démonstration L'application f^p qui est aussi strictement contractante sur le fermé F dans l'espace métrique complet E admet un unique point fixe $\alpha \in F$. De $f^p(\alpha) = \alpha$ on déduit que $f^p(f(\alpha)) = f(f^p(\alpha)) = f(\alpha)$ et $f(\alpha)$ est aussi point fixe de f^p . On a donc $f(\alpha) = \alpha$ du fait de l'unicité du point fixe de f^p . L'application f admet donc un point fixe dans F . En considérant que tout point fixe de f est aussi point fixe de f^p , on déduit que ce point fixe est unique dans F . Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $x_0 \in E$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $x_{np+r} = f^{np+r}(x_0) = (f^p)^n(f^r(x_0))$ pour tout $r \in \{0, \dots, p-1\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $(x_{np+r})_{j \in \mathbb{N}}$ est une orbite suivant f^p de valeur initiale $f^r(x_0)$. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{np+r} = \alpha$ pour tout $r \in \{0, \dots, p-1\}$ ce qui équivaut à dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$ (exercice 2.7). ■

2.9 Continuité et connexité

Définition 2.25. Un sous-ensemble non vide $\mathcal{C}$ de E est *connexe* si la condition $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ avec $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ ouverts de E tels que $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ entraîne $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1 = \emptyset$ (et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_2$) ou $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ (et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_1$), c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ ne peut s'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts de $\mathcal{C}$.

Le résultat qui suit ainsi que son corollaire sont souvent utiles pour montrer qu'un ensemble est connexe.

Théorème 2.43.

Si f est une fonction continue de E dans F , alors pour tout connexe $\mathcal{C}$ de E , l'image $f(\mathcal{C})$ est connexe dans F .

Démonstration Soient $\mathcal{C}$ une partie connexe de E et $\mathcal{C}' = f(\mathcal{C})$. Supposons qu'il existe deux ouverts $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ de F tels que $\mathcal{C}' \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{C}' \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. On a alors $\mathcal{C} \subset f^{-1}(\mathcal{C}') \subset f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cup f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ avec $f^{-1}(\mathcal{O}_1), f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ ouverts dans E et $\mathcal{C} \cap f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2) = \emptyset$, ce qui entraîne que $\mathcal{C} \cap f^{-1}(\mathcal{O}_1) = \emptyset$ ou $\mathcal{C} \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2) = \emptyset$ et donc que $\mathcal{C}' \cap \mathcal{O}_1 = \emptyset$ ou $\mathcal{C}' \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. L'ensemble $\mathcal{C}'$ est donc connexe dans F . ■

Corollaire 2.4. *Une partie $\mathcal{C}$ de (E, d) est connexe si, et seulement si, toute application continue de $\mathcal{C}$ dans $\{0, 1\}$ est constante.*

Démonstration Soient $\mathcal{C}$ connexe dans E et $f : \mathcal{C} \rightarrow \{0, 1\}$ continue. L'ensemble $f(\mathcal{C})$ est connexe non vide dans $\mathbb{R}$ contenu dans $\{0, 1\}$ et c'est nécessairement $\{0\}$ ou $\{1\}$ puisque $\{0, 1\}$ n'est pas connexe (en effet $\{0, 1\} \subset \left]-1, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$) ce qui signifie que f est constante. Réciproquement si $\mathcal{C}$ n'est pas connexe il existe deux ouverts $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ de E tels que $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ avec $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$, $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$ et $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$. La fonction caractéristique de $\mathcal{O}_1$, définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathcal{O}_1$ et $f(x) = 0$ sinon est alors continue de E dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\{0, 1\}$ (si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, on a $f^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_1$ si $1 \in \mathcal{O}$ et $f^{-1}(\mathcal{O}) = \emptyset$ ou $f^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_2$ sinon) et non constante sur $\mathcal{C}$ (pour $x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$ on a $f(x) = 1$ et pour $x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$ on a $f(x) = 0$). ■

Corollaire 2.5. *Si $\mathcal{C}$ est une partie connexe de E , son adhérence $\overline{\mathcal{C}}$ est alors connexe.*

Démonstration Si f est une application continue de $\overline{\mathcal{C}}$ dans $\{0, 1\}$, sa restriction au connexe $\mathcal{C}$ est alors constante (puisque également continue) et par densité la fonction f est également constante sur $\overline{\mathcal{C}}$. ■

Théorème 2.44.

Une réunion de connexes de E d'intersection non vide est connexe.

Démonstration

Soit $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ une famille de connexes de E et $\mathcal{C} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_i$. Si $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue à valeurs dans $\{0, 1\}$, alors pour tout $i \in I$ la restriction de f à $\mathcal{C}_i$ qui est également continue est constante égale à γ_i puisque $\mathcal{C}_i$ est connexe. Pour $x \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$ (cette intersection est supposée non vide), on a $f(x) = \gamma_i$ pour tout $i \in I$, les γ_i sont donc tous égaux et f est constante sur $\mathcal{C}$. L'ensemble $\mathcal{C}$ est donc connexe. ■

Définition 2.26. On dit qu'une partie $\mathcal{C}$ de E est *connexe par arcs*, si pour tout couple (a, b) d'éléments de $\mathcal{C}$ il existe une application continue γ de $[0, 1]$ dans $\mathcal{A}$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$ (deux points quelconques de $\mathcal{A}$ peuvent être joints par un arc continu dans $\mathcal{A}$).

Théorème 2.45.

Un ensemble connexe par arcs dans E est connexe.

Démonstration

Si $\mathcal{C}$ est connexe par arcs dans E , pour $a \in \mathcal{C}$ fixé en désignant pour tout $x \in \mathcal{C}$ par γ_x un arc continu joignant les points a et x dans $\mathcal{C}$, on a alors $\mathcal{C} = \bigcup_{x \in \mathcal{A}} \gamma_x([0, 1])$, avec $\gamma_x([0, 1])$ connexe pour tout $x \in \mathcal{A}$, comme image du connexe $[0, 1]$ par l'application continue γ_x , ce qui implique que $\mathcal{C}$ est connexe comme réunion de connexes ayant tous en commun le point $a = \gamma_x(0)$. ■

Contrairement à ce qu'il se passe pour l'adhérence, l'intérieur d'un connexe n'est pas nécessairement connexe. Par exemple, dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$ est connexe (il est connexe par arcs, donc connexe et son intérieur $\overset{\circ}{\mathcal{C}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0\}$ est non connexe.

2.10 Espaces topologiques

¹Une structure topologique sur E est définie par la donnée d'un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de E tel que :

- $\emptyset$ et E sont dans $\mathcal{T}$;
- si $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont dans $\mathcal{T}$, leur intersection $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ est alors dans $\mathcal{T}$;
- si $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ est une familles d'éléments de $\mathcal{T}$, leur réunion est alors dans $\mathcal{T}$.

1. Assez curieusement, les espaces topologiques ne sont pas au programme de l'agrégation interne ou externe!

Le deuxième axiome équivaut à dire qu'une intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est dans $\mathcal{T}$.

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés *ouverts* de E et l'ensemble E muni de cette structure topologique est appelé *espace topologique*. Un tel espace topologique est noté $(E, \mathcal{T})$. Pour $\mathcal{T}$ fixé, on notera simplement E un tel espace.

Exemples 2.9

- La famille $\{\emptyset, E\}$ définit la topologie grossière sur E et est sans grand intérêt.
- La famille $\mathcal{P}(E)$ des parties de E définit la topologie discrète sur E .
- Si (E, d) est un espace métrique, la famille de tous les ouverts de E pour cette distance d définit alors une structure topologique sur E dite associée à la structure métrique. La topologie associée à la distance discrète ($d(x, x) = 0$ et $d(x, y) = 1$ pour $x \neq y$) est la topologie discrète.
- Si D est une partie non vide de E , la famille $\mathcal{T}_D = \{D \cap \mathcal{O}, \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}$ des traces sur D des ouverts de E définit une topologie sur D dite topologie induite.

Pour la suite de ce paragraphe, E est un espace topologique, $\mathcal{T}$ désignant la famille des ouverts correspondants.

Définition 2.27. On appelle *voisinage* d'un point a de E toute partie $\mathcal{V}$ de E qui contient un ouvert qui contient a .

On vérifie facilement qu'une partie de E est ouverte si, et seulement si, elle est voisinage de chacun de ses points.

Définition 2.28. On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de E est un *fermé* si son complémentaire $E \setminus \mathcal{F}$ est un ouvert.

La famille $\mathcal{U}$ des fermés de E vérifie les propriétés suivantes :

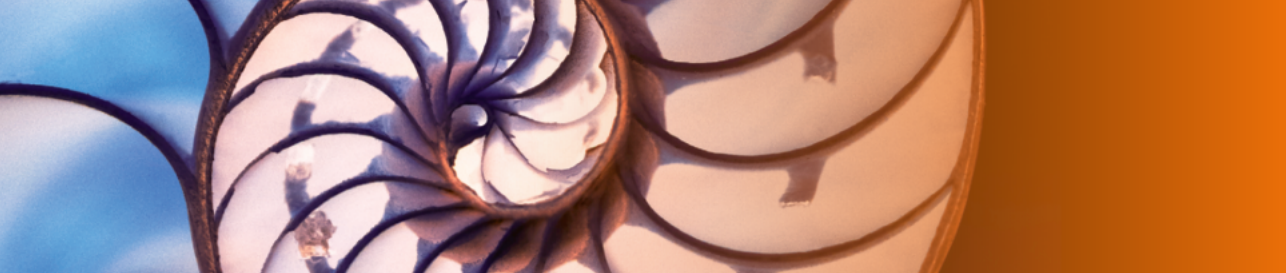
- $\emptyset$ et E sont dans $\mathcal{U}$;
- une réunion finie d'éléments de $\mathcal{U}$ est dans $\mathcal{U}$;
- l'intersection d'une famille d'éléments de $\mathcal{U}$ est dans $\mathcal{U}$.

Définition 2.29. Un espace topologique E est dit *séparé*, si pour tous points $x \neq y$ dans E , il existe un voisinage $\mathcal{V}_x$ de x et un voisinage $\mathcal{V}_y$ de y sans point commun (axiome de Hausdorff).

Dans un espace topologique séparé un singleton $\{x\}$ ou un sous-ensemble fini, sont des fermés.

Exemples 2.10

- Un ensemble E muni de la topologie grossière n'est pas séparé car l'unique ouvert non vide est E .



Mathématiques pour l'agrégation

Analyse et probabilités

La préparation des candidats aux concours de l'agrégation interne et externe de mathématiques nécessite des outils et des méthodes spécifiques qu'il leur est souvent bien difficile de se procurer, faute d'une littérature adaptée aux exigences de la situation.

Ce cours d'analyse et de probabilités est taillé sur mesure pour ces candidats. Les notions indispensables y sont abordées dans le détail et leur assimilation est facilitée par un grand nombre d'exercices corrigés dont beaucoup peuvent être utilisés par les candidats pour leurs leçons des épreuves orales.

1. Le corps des nombres réels
 2. Espaces métriques
 3. Espaces vectoriels normés
 4. Séries dans un espace vectoriel normé
 5. Suites et séries de fonctions
 6. Fonctions d'une variable réelle
 7. Séries entières
 8. Intégrale de Riemann
 9. Intégrales impropres
 10. Intégrales impropres dépendant d'un paramètre
 11. Série de Fourier d'une fonction périodique
 12. Espaces préhilbertiens réels
 13. Polynômes orthogonaux
 14. Variables aléatoires réelles discrètes
 15. Variables aléatoires réelles
- Bibliographie – Index

LES PLUS

- Parfait complément du volume de **Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie**
- Chaque théorème est suivi d'une série d'applications
- Tous les exercices sont intégralement corrigés

Agrégé de mathématiques, **Jean-Étienne Rombaldi** a enseigné à l'université Grenoble-Alpes, institut Fourier. Membre du jury du CAPES externe et de l'agrégation interne de mathématiques pendant plusieurs années, il a été responsable de la préparation à l'agrégation interne de l'université de Grenoble et préparateur à l'agrégation interne et externe de cette même université ainsi que pour le CNED.

ISBN : 978-2-8073-4923-0



9 782807 349230

deboeck
SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com